Techniques de factorisation

1) Introduction

Il est souvent demandé de factoriser une expression mathématique, c'est-à-dire de réécrire l'expression sous la forme d'un produit de facteurs, un facteur pouvant être un nombre (par exemple 3), un monôme (par exemple $4x$) ou une parenthèse contenant une expression plus complexe (par exemple $4x^2 - 5x + 1$).

L'utilité principale de la factorisation réside dans le fait qu'elle permet de résoudre facilement une équation de la forme $[\text{expression}] = 0$.

En effet, un produit de facteurs est nul si au moins l'un des facteurs est nul. Une fois la factorisation effectuée, il suffit de résoudre une à une les équations

facteur 1 = 0
facteur 2 = 0
facteur 3 = 0
etc

Exemple :

La factorisation d'une expression a abouti à l'équation

$$2x(3x-1)(5x+2)=0$$

Les possibilités pour que ce produit soit égal à 0 sont :

a) $2x=0$

d'où $x=0$

b) $3x-1=0$

soit $3x=1$

d'où $x=\frac{1}{3}$

c) $5x+2=0$

soit $5x=-2$

d'où $x=-\frac{2}{5}$

Remarque : L'équation

$$[\text{expression factorisée}] = \text{valeur}$$

n'est aisée que si valeur $= 0$.

Pour d'autres valeurs, elle peut être fastidieuse car elle nécessite d'étudier un certain nombre de cas, voire être impossible.

Exemple : Si on se limite à deux facteurs devant être des entiers naturels, la valeur 6 peut s'écrire 1×6, 2×3, 3×2, 6×1.

Il faut donc étudier chaque cas :

- 1er facteur égal à 1, 2ème facteur égal à 6
- 1er facteur égal à 2, 2ème facteur égal à 3
- 1er facteur égal à 3, 2ème facteur égal à 2
- 1er facteur égal à 6, 2ème facteur égal à 1

Le problème se complique si les facteurs peuvent être des entiers relatifs : $6 = (-1)\times(-6)$, $(-2)\times(-3)$, $(-3)\times(-2)$, $(-6)\times(-1)$, 1×6, 2×3, 3×2, 6×1.

Il peut avoir une infinité de possibilités si les deux facteurs peuvent être réels. (Il y a en effet une infinité de possibilités pour que le produit de deux nombres soit égal à 6.)

Avec trois facteurs, le champ des possibilités s'étend sensiblement : par exemple, $6 = 1\times1\times6$, $1\times2\times3$, $1\times3\times2$, $2\times1\times3$, etc.

2) Structures de factorisation le plus souvent rencontrées dans les exercices

2.1) Facteur(s) commun(s)

Un ou plusieurs facteurs peuvent être répétés dans l'expression. Il faut alors mettre en facteur ce ou ces facteurs communs.

Exemples :

- $$\boxed{A = \underline{(3x-1)}(2x+5) + (x-7)\underline{(3x-1)}}$$

Le facteur $(3x-1)$ est commun aux deux parties de l'expression. Il faut donc mettre $(3x-1)$ en facteur.

$A = (3x-1)\left[\underbrace{(2x+5)}_{} + \underbrace{(x-7)}_{}\right]$ Conseil : Mettre d'abord les facteurs restants entre crochets.

$(3x-1)$ est "sorti". Il reste $(2x+5)$

$(3x-1)$ est "sorti". Il reste $(x-7)$

$= (3x-1)(2x+5+x-7)$

$\boxed{A = (3x-1)(3x-2)}$

$\boxed{B = \underbrace{(2x-7)}^{2} - \underbrace{(2x-7)}(x-3)}$

Le facteur $(2x-7)$ est commun aux deux parties de l'expression. Il doit donc être mis en facteur :

$B = (2x-7)\left[\underbrace{(2x-7)}_{} - \underbrace{(x-3)}_{}\right]$

Dans $(2x-7)^2$ il y a deux fois le facteur $(2x-7)$. Un des facteurs est sorti. Il reste donc le second.

$(2x-7)$ est sorti. Il reste $-$ $(x-3)$.
Ne pas oublier le $-$.

$= (2x-7)(2x-7-x+3)$

⚠ Comme il y a moins devant la parenthèse, il faut lorsqu'on enlève la parenthèse inverser tous les signes de la parenthèse, et pas seulement le premier (ERREUR FRÉQUENTE).

$\boxed{B = (2x-7)(x-4)}$

- $\boxed{C = \underbrace{x}\underbrace{(x-1)}(2x-1) - 5\underbrace{x}(x-7)\underbrace{(x-1)}}$

Les facteurs communs sont x et $(x-1)$. Ils doivent donc être mis en facteurs :

$$C = x(x-1)\left[\underbrace{(2x-1)} \underbrace{-5(x-7)}\right]$$

x et $(x-1)$ sont sortis. Il reste $(2x-1)$.

x et $(x-1)$ sont sortis. Il reste $-5(x-7)$. Ne pas oublier le $-$.

$$= x(x-1)(2x-1-5x+35)$$

Attention à l'inversion des signes !

$$\boxed{C = x(x-1)(-3x+34)}$$

⚠ Cas particuliers qu'il faut apprendre à reconnaître

1) Parfois, un des facteurs communs est "caché" par la multiplication de tous ses termes par un même nombre. Il faut alors mettre ce nombre en facteur pour faire apparaître le facteur commun.

Exemple :

$$\boxed{D = (2x-1)(x+3) - (3x+2)(4x-2)}$$

Apparemment, il n'y a pas de facteurs communs
Cependant, en faisant un peu attention, on remarque
que, dans $(4x-2)$, $4 = 2\times 2$ et $-2 = 2\times(-1)$.
On peut donc mettre 2 en facteur, qu'on place
au début des parenthèses :

$$D = \underline{(2x-1)}(x+3) - 2(3x+2)\underline{(2x-1)}$$

On voit alors apparaître le facteur commun $(2x-1)$.

D'où

$$D = (2x-1)\left[(x+3) - 2(3x+2)\right]$$

$$= (2x-1)(x+3-6x-4)$$

$$D = (2x-1)\underline{(-5x-1)}$$

On peut s'arrêter là (l'exercice sera considéré comme correct), mais on peut avoir "l'élégance" — petite cerise sur le gâteau — de "mettre le moins en facteur" au début de l'expression factorisée :

$$\boxed{D = -(2x-1)(5x+1)}$$

Votre professeur(e) appréciera ! :-)

2) Parfois, on a presque un facteur commun.

En y regardant de plus près, on voit que l'ordre des termes, mais surtout leurs signes, sont inversés.
Il faut alors remettre les termes dans le bon ordre, inverser le signe devant le groupe de parenthèses et inverser les signes à l'intérieur du facteur presque commun.

Exemple :

$$\boxed{E = (3x-2)(x+7) - (5x-3)(2-3x)}$$

On a $(3x-2)$ d'un côté et $(2-3x)$ de l'autre.
On remarque que l'ordre a été inversé mais que $3x$ est devenu $-3x$ et que -2 est devenu $+2$.

Il faut donc réécrire l'expression comme suit :

$$E = (3x-2)(x+7) + (5x-3)(3x-2)$$

Il faut inverser le signe devant le groupe de parenthèses.

Il faut remettre les termes dans le bon ordre et inverser les signes de tous les termes du facteur.

On voit alors apparaître le facteur commun $(3x-2)$.

D'où

$$E = (3x-2)\left[(x+7) + (5x-3)\right]$$
$$= (3x-2)(x+7+5x-3)$$
$$E = (3x-2)(6x+4)$$

Elégance : 6 et 4 ont pour facteur commun 2. Il faut donc mettre 2 en facteur au début de l'expression.

Soit finalement $\boxed{E = 2(3x-2)(3x+2)}$

3) Parfois, le facteur commun est seul, sans autre facteur.
Il faut dans ce cas, lors de la factorisation, remplacer le facteur seul par 1.

Exemple :

$$\boxed{F = \underline{(5x-3)}(2x+1) - \underline{(5x-3)}}$$

$$= (5x-3)\left[(2x+1) - 1\right]$$

$(5x-3)$ est sorti.
Il reste -1, (et non 0 ⚠)

2.2) Utilisation d'identités remarquables

Les identités remarquables constituent le véritable cœur des exercices de factorisation.
Il faut donc bien savoir les reconnaître !
(Une identité remarquable est faite pour être remarquée :-)

Les trois identités remarquables de factorisation utilisées au collège et au lycée sont :

1) $\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

En français : la différence des carrés de deux termes est égale au produit de la différence et de la somme de ces deux termes.

Exemples :

$\boxed{A = x^2 - (2x-3)^2} = \left[x - (2x-3)\right]\left[x + (2x-3)\right]$

$= (x - 2x + 3)(x + 2x - 3)$

Inversion des signes !

$= (-x+3)(3x-3)$ 3 peut être mis en facteur

$\boxed{A = \mathbf{3}(-x+3)(x-1)}$

$\boxed{B = 9x^2 - (5x-2)^2} = (3x)^2 - (5x-2)^2$

⚠ Le carré ne concerne que x.
Il n'y a donc pas un terme au carré !

Là, on a bien une différence de deux carrés.

D'où

$$9x^2 - (5x-2)^2 = [\underbrace{3x}_{} - (\underbrace{5x-2}_{})][\underbrace{3x}_{} + (\underbrace{5x-2}_{})]$$

$$= (3x - 5x + 2)(3x + 5x - 2)$$

$$= (\underbrace{-2x+2}_{})(\underbrace{8x-2}_{})$$

-2 et 2 ont pour facteur commun 2 | 8 et -2 ont pour facteur commun 2

$$= 2 \times 2(-x+1)(4x-1)$$

$$\boxed{B = 4(-x+1)(4x-1)}$$

$$\boxed{C = 9(x-1)^2 - 16(-2x+3)^2}$$

Les carrés ne concernent que les parenthèses.

L'expression ne fait pas explicitement apparaître la différence de deux carrés.

$$= [\underbrace{3(x-1)}_{}]^2 - [\underbrace{4(-2x+3)}_{}]^2$$

Là, on a bien une différence de deux carrés.

$$= [\underbrace{3(x-1)}_{} - \underbrace{4(-2x+3)}_{}][\underbrace{3(x-1)}_{} + \underbrace{4(-2x+3)}_{}]$$

$$= (3x - 3 + 8x - 12)(3x - 3 - 8x + 12)$$

$$\boxed{C = (11x-15)(-5x+9)}$$

$$\boxed{D = (2x+1)^2 - 3(x-2)^2}$$

3 n'est pas un carré parfait.
Mais $\underline{3 = (\sqrt{3})^2}$, par définition de la racine carrée.

(Exemples de carrés parfaits : 25, 36, 49, 100, 121 ...)
<u>Un nombre positif est toujours le carré de sa racine.</u>

d'où

$$D = \underbrace{(2x+1)}^2 - \left[\sqrt{3}\underbrace{(x-2)}\right]^2$$

$$= \left[\underbrace{(2x+1)} - \underbrace{\sqrt{3}(x-2)}\right]\left[\underbrace{(2x+1)} + \underbrace{\sqrt{3}(x-2)}\right]$$

$$= \left(2x + 1 - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}\right)\left(2x + 1 + \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{D = \left[(2-\sqrt{3})x + 1 + 2\sqrt{3}\right]\left[(2+\sqrt{3})x + 1 - 2\sqrt{3}\right]}$$

$2x - \sqrt{3}x$ ont pour facteur commun x.
x est ici mis à droite pour être homogène avec l'écriture habituelle ax, où a est un coefficient, c'est-à-dire un nombre constant.

Idem pour $2x + \sqrt{3}x$

2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
3) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Ou plutôt, dans la pratique

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

En français :

- La somme des carrés de deux termes plus 2 fois le produit de ces termes est égale au carré de la somme de ces deux termes.

- La somme des carrés de deux termes moins 2 fois le produit de ces termes est égale au carré de la différence de ces deux termes.

Exemples :

$$E = 4x^2 - 12x + 9 - (-5x+2)(2x-3)$$

$4x^2 = (\underbrace{2x})^2$

$9 = \underbrace{3}^2$

$(\underbrace{2x} \times \underbrace{3}) \times 2 = 12x$ (2 fois le produit des deux termes)

d'où $4x^2 - 12x + 9 = (\underbrace{2x} - \underbrace{3})^2$

⊖ 2 fois le produit des deux termes

carré de la différence des deux termes

L'expression E est donc égale à

$$(2x-3)^2-(-5x+2)(2x-3)$$

$$= (2x-3)\left[(2x-3)-(-5x+2)\right]$$

$$= (2x-3)(2x-3+5x-2)$$

d'où finalement

$$\boxed{E=(2x-3)(7x-5)}$$

$$\boxed{F=(3x-2)(\sqrt{3}x+2)+3x^2+4\sqrt{3}x+4}$$

Note : Il ne faut pas se laisser impressionner par la présence de $\sqrt{3}$. :-)

$$3x^2=(\underbrace{\sqrt{3}x})^2$$

Rappel : Un nombre positif est le carré de sa racine.

$$4=\underbrace{2}^2$$

$$(\underbrace{\sqrt{3}x}\times\underbrace{2})\times 2=4\sqrt{3}x$$ (2 fois le produit des deux termes)

d'où $3x^2+4\sqrt{3}x+4=(\sqrt{3}x+2)^2$

⊕ 2 fois le produit des deux termes

carré de la somme des deux termes

et

$$F=(3x-2)(\sqrt{3}x+2)+(\sqrt{3}x+2)^2$$

$$=(\sqrt{3}x+2)\left[(3x-2)+(\sqrt{3}x+2)\right]$$

$$=(\sqrt{3}x+2)(3x-2+\sqrt{3}x+2)=(\sqrt{3}x+2)(3x+\sqrt{3}x)$$

$$F = (\sqrt{3}x + 2)\underbrace{(3+\sqrt{3})x}$$

$3x$ et $\sqrt{3}x$ ont pour facteur commun x.
Ici, x est mis à droite. (voir p. 10)

d'où finalement

$$\boxed{F = \underbrace{(3+\sqrt{3})}\underbrace{x}(\sqrt{3}x + 2)}$$

Ce facteur est mis en tête car il s'agit d'un nombre constant

Il est d'usage de mettre en tête, après la constante, le facteur composé de la seule variable.

Note: Je reconnais que cet exemple est un peu plus difficile. :-)

Remarque: Souvent dans les exercices de ce type, la partie avec les facteurs contient le facteur "caché" dans l'identité remarquable.

- Dans l'expression E, $(-5x+2)(2x-3)$ contient le facteur $(2x-3)$ de l'identité remarquable.
- Dans l'expression F, $(3x-2)(\sqrt{3}x+2)$ contient le facteur $(\sqrt{3}x+2)$ de l'identité remarquable.

⚠ **Important :**

Il y a parfois dans les exercices des pièges qu'il faut savoir déceler.

1) Tout d'abord, il n'existe pas d'identité (c'est-à-dire valable dans tous les cas) pour la somme de deux carrés

Dans le cas général, il n'y a donc pas d'identité pour $a^2 + b^2$.

(Il est cependant possible, sous certaines conditions, de mettre en facteurs la somme de deux carrés. La technique sera décrite dans un autre document.)

2) Parfois, un exercice contient une fausse identité remarquable : l'expression ressemble à une identité de type $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$ mais n'est pas une telle identité. :-)

On rencontre dans les exercices deux types de ressemblance :

a) On a bien une somme de carrés mais le double produit n'est pas égal au terme en x.

Exemple : $4x^2 + 10x + 9$

$4x^2 = (2x)^2 \quad 9 = 3^2$

mais $2 \times (2x) \times 3 = 12x \neq 10x$

L'expression ne peut donc être factorisée à l'aide d'une identité remarquable.
(Elle peut cependant être factorisée, mais à l'aide d'outils vus en Terminale S.)

b) <u>Un des carrés est précédé du signe $-$.</u>

Or les identités sont

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2$$

Exemple : $4x^2 + 12x - 9$ <u>n'est pas</u> égal à $(2x+3)^2$ ou $(2x-3)^2$ du fait de la présence du signe $-$ devant le carré 9.

3) <u>L'identité remarquable est "cachée" par un facteur</u>

Exemple :

$$\boxed{G = 18x^2 - 12x + 2 + (3x-1)(-2x+3)}$$

Apparemment $18x^2 - 12x + 2$ n'est pas une identité remarquable.
Mais, en remarquant que 18, 12 et 2 ont pour facteur commun 2, on peut réécrire l'expression G en mettant 2 en facteur :

$$G = 2(9x^2 - 6x + 1) - (3x-1)(-2x+3)$$

L'identité remarquable apparaît alors :

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$$

G s'écrit alors

$$G = 2(3x-1)^2 - (3x-1)(-2x+3)$$

$$= (3x-1)\left[2(3x-1) - (-2x+3)\right]$$

$$= (3x-1)(6x-2+2x-3)$$

$$\boxed{G = (3x-1)(8x-5)}$$