Exercice n°2 : Les tours de Hanoï

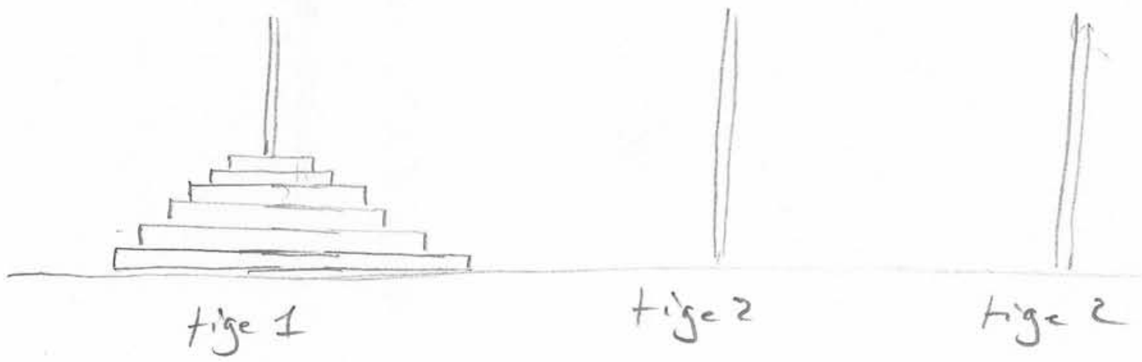
24/10/15

3

Le but de ce jeu, inventé par le mathématicien Edouard Lucas en 1883, est de déplacer n rondelles ($n \in \mathbb{N}^*$) de la tige 1 à la tige 3 en un minimum de coups.

Un coup consiste à déplacer une rondelle, située au sommet d'une pile, au sommet d'une autre pile, en respectant les règles suivantes :

- On ne déplace qu'une rondelle à la fois.
- Une rondelle ne doit jamais se trouver au-dessus d'une rondelle plus petite.



1) Pour $n = 1$, détermine le nombre minimal de coups permettant de déplacer la rondelle de la tige 1 à la tige 3.

Il faut évidemment un seul coup. (passage de la rondelle de la tige 1 à la tige 3).

24/10/15
4

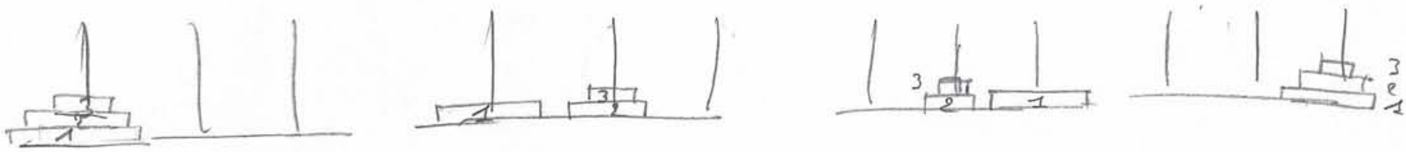
2) Pour $n = 2$, reproduire et compléter les dessins ci-dessous correspondant aux trois étapes permettant de déplacer les deux rondelles de la tige 1 à la tige 3 en un minimum de coups

position initiale

position finale

Pour $n = 2$, il faut 3 coups

3) Pour $n = 3$, grâce aux dessins ci-dessous, trouver le nombre minimal de coups permettant de passer de la position initiale à la position finale.



Position initiale

Nombre de coups ?

Nombre de coups ?

Nombre de coups.

Pour passer de la position initiale à la position 2, il faut 3 coups (rondelle 3 sur tige 3, rondelle 2 sur tige 2, rondelle 3 sur tige 2).

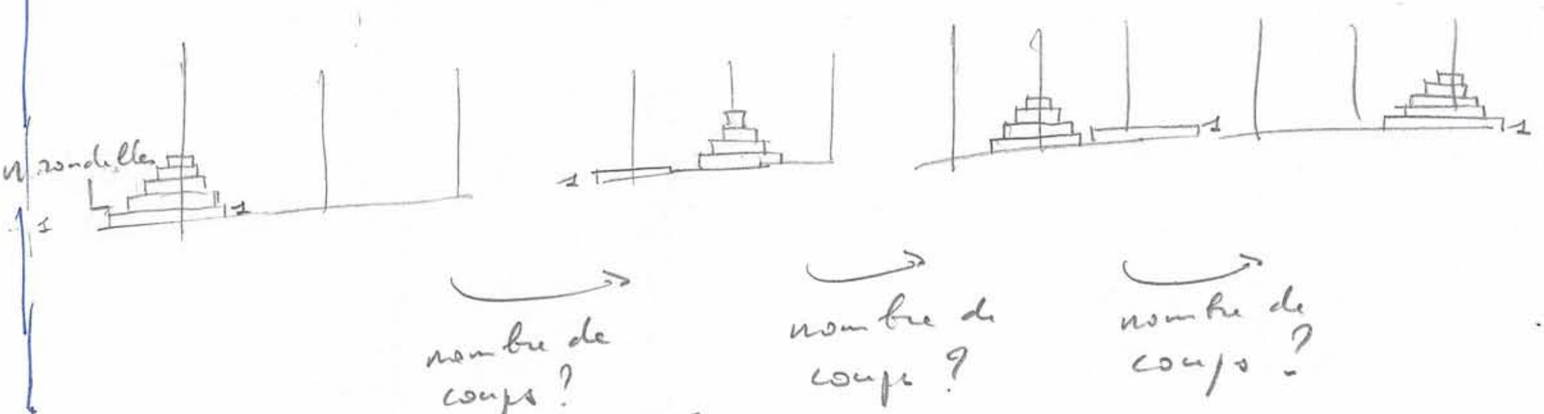
Pour passer de la position 2 à la position 3, il faut 1 coup (rondelle 1 de la tige 1 à la tige 3)

Pour passer de la position 3 à la position finale, il faut de nouveau 3 coups (rondelle 3 sur tige 1, rondelle 2 sur tige 3, rondelle 3 sur tige 3).

Il faut donc au total $3 + 1 + 3 = 7$ coups.

4) On note, pour $n \geq 1$, u_n le nombre minimal de coups permettant de passer n rondelles de la tige 1 à la tige 3.

On dispose désormais de $n+1$ rondelles sur la tige 1, où $n \geq 1$



En déduire que $u_{n+1} = 2u_n + 1$

Il faut u_n coups pour déplacer les n rondelles du dessus (rondelles 2 à $n+1$) de la tige 1 à la tige 2.

Il faut un (1) coup pour déplacer la rondelle 1 de la tige 1 à la tige 3.

Il faut u_n coups pour déplacer les n rondelles 2 à $n+1$ de la tige 2 à la tige 3.

Il faut donc au total $u_n + 1 + u_n = 2u_n + 1$ coups.

24/10/15

6

5a) Avec une calculatrice ou un logiciel, donner une valeur approchée de u_{64}.

En programmant la suite sur un tableur (Open Office Calc),

Nombre de rondelles	Nombre de coups
1	1
2	= 2x cellule + 1

Copie jusqu'à n = 64

on trouve

$u_{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,600\,000$

$\simeq 1{,}8447 \times 10^{19}$ coups !

5b) Sachant qu'il faut une seconde pour déplacer une rondelle, évaluer une valeur approchée du nombres d'années nécessaires pour déplacer 64 rondelles.

Une année contient approximativement $365{,}25 \times 24 \times 3600 = 31\,557\,600$ secondes.

Pour déplacer 64 rondelles, il faut donc

$5{,}84 \times 10^{11}$ années !

(L'Univers existe depuis $13{,}7 \times 10^{9}$ années.

Il faut donc plus de 42 fois l'âge de l'Univers.)