En analysant une seule situation, Euler a réussi avec une grande ingéniosité, l'évaluation des sommes infinies suivantes :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \text{ (Série de Leibniz)},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots \text{ (Le défi de Jakob Bernoulli)},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = 1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \cdots \text{, et plus encore.}$$

En unifiant ces sommes sous une seule théorie, Euler a confirmé sa réputation de l'un des plus grands manipulateurs de sommes infinies. Notre histoire commence avec un résultat tiré de son fameux ouvrage *Introductio in analysin infinitorum*.

Lemme : Si $P(x) = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots = (1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x)(1 + \alpha_3 x)\cdots$, alors

$$\sum \alpha_k = A$$
$$\sum \alpha_k^2 = A^2 - 2B$$
$$\sum \alpha_k^3 = A^3 - 3AB + 3C$$
$$\sum \alpha_k^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D, \quad \text{etc.}$$

Ces résultats resteraient "valables" dans le cas d'un nombre infini de facteurs.

Preuve : Euler a observé que de telles formules étaient "intuitivement évidentes", mais a promis un argument rigoureux utilisant le calcul différentiel. Cette preuve est apparue dans son article de 1750 autour de la théorie des équations. Avant de prouver ce lemme, tâchons de comprendre sa signification. En posant $P(x) = (1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x)(1 + \alpha_3 x)\cdots = 0$, les racines de P sont $x = -1/\alpha_1, -1/\alpha_2, -1/\alpha_3, \ldots$. Ainsi ce lemme connecte les coefficients $A, B, C, \ldots$ dans l'expression développée de P avec les opposés des inverses des racines de P. Ce résultat semble donc algébrique.
Mais Euler, le grand analyste, n'était pas de cet avis ! Il a commencé par prendre les logarithmes :

$$\begin{aligned} \ln[P(x)] &= \ln[1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots] \\ &= \ln[(1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x)(1 + \alpha_3 x)\cdots] \\ &= \ln(1 + \alpha_1 x) + \ln(1 + \alpha_2 x) + \ln(1 + \alpha_3 x) + \cdots \end{aligned}$$

Ensuite, Euler dérive les deux membres de cette égalité et obtient

$$\frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots} = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1 x} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2 x} + \frac{\alpha_3}{1 + \alpha_3 x} + \cdots.$$

1. Cet article est une traduction d'un passage dans l'excellentissime livre *William Dunham, The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue- Princeton University Press (2005).*

À ce stade, il était évident pour Euler que chacune des fractions $\dfrac{\alpha_k}{1+\alpha_k x}$ est la somme d'une suite géométrique de premier terme α_k et de raison $r=-\alpha_k x$. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1 x} &= \alpha_1-\alpha_1^2 x+\alpha_1^3 x^2-\alpha_1^4 x^3+\cdots, \\
\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2 x} &= \alpha_2-\alpha_2^2 x+\alpha_2^3 x^2-\alpha_2^4 x^3+\cdots, \\
\frac{\alpha_3}{1+\alpha_3 x} &= \alpha_3-\alpha_3^2 x+\alpha_3^3 x^2-\alpha_3^4 x^3+\cdots, \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

En additionnant les colonnes ci-dessus et en sommant les puissances similaires des α_k, la relation donnée par la dérivée logarithmique devient

$$\frac{A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots}{1+Ax+Bx^2+Cx^3+\cdots}=\sum\alpha_k-\Big(\sum\alpha_k^2\Big)x+\Big(\sum\alpha_k^3\Big)x^2-\Big(\sum\alpha_k^4\Big)x^3+\cdots.$$

En effectuant le produit en croix, puis en développant Euler obtient

$$\begin{aligned}
A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots &= [1+Ax+Bx^2+Cx^3+\cdots] \\
&\quad\times\Big[\sum\alpha_k-\Big(\sum\alpha_k^2\Big)x+\Big(\sum\alpha_k^3\Big)x^2-\Big(\sum\alpha_k^4\Big)x^3+\cdots\Big] \\
&= \sum\alpha_k+\Big[A\sum\alpha_k-\sum\alpha_k^2\Big]x+\Big[B\sum\alpha_k-A\sum\alpha_k^2+\sum\alpha_k^3\Big]x^2 \\
&\quad+\Big[C\sum\alpha_k-B\sum\alpha_k^2+A\sum\alpha_k^3-\sum\alpha_k^4\Big]x^3+\cdots.
\end{aligned}$$

À partir ce cette dernière égalité, Euler a identifié les coefficients de même puissances de x et a déterminé récursivement les $\sum\alpha_k^m$:

1. $\sum\alpha_k=A$,

2. $\Big[A\sum\alpha_k-\sum\alpha_k^2\Big]=2B$, ce qui donne $\sum\alpha_k^2=\Big[A\sum\alpha_k-2B\Big]=A^2-2B$.

3. $B\sum\alpha_k-A\sum\alpha_k^2+\sum\alpha_k^3=3C$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum\alpha_k^3 &= A\sum\alpha_k^2-B\sum\alpha_k+3C \\
&= A[A^2-2B]-AB+3C \\
&= A^3-3AB+3C,
\end{aligned}$$

4. $C\sum\alpha_k-B\sum\alpha_k^2+A\sum\alpha_k^3-\sum\alpha_k^4=4D$, et donc

$$\sum\alpha_k^4=A^4-4A^2B+4AC+2B^2-4D.$$

Je vous laisse aller plus loin si vous le souhaitez. De cette façon, en combinant logarithmes, dérivées et séries géométriques, Euler a su prouver ses formules "intuitivement évidentes".

Venons-en maintenant à l'application spectaculaire de ce lemme. Notre fameux maître l'a appliqué à l'expression générale

$$P(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2n}x\right) + \tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n}x\right).$$

Dans notre cas, nous nous intéressons au cas $m = 1$ et $n = 2$. On considère donc

$$P(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \tan\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

Pour appliquer le lemme, nous devons écrire P comme une série infinie et un produit infini de facteurs de la forme $(1 + \alpha_k x)$, où $-1/\alpha_k$ est une solution de $P(x) = 0$. En effet, en utilisant les développements en série de cos et sin on obtient

$$\begin{aligned} P(x) = 1 + \frac{\pi}{4}x - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{\pi^3}{4^3 \cdot 3!}x^3 \\ + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!}x^4 + \frac{\pi^5}{4^5 \cdot 5!}x^5 - \cdots \end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients du lemme sont

$$A = \pi/4, B = -\pi^2/32, C = -\pi^3/384, D = \pi^4/6144, \ldots.$$

D'autre part, $P(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0$ donne l'équation $\tan\frac{\pi}{4}x = -1$, admettant comme solutions $x = -1, 3, -5, 7, -9, \ldots$. Les opposés des inverses de ces solutions sont les α_k du lemme, donnés par

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1/3, \alpha_3 = 1/5, \alpha_4 = -1/7, \alpha_5 = 1/9, \ldots.$$

Maintenant, d'après le lemme $\sum \alpha_k = A$ et donc $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$. Nous obtenons ainsi, en un claquement de doigts, la fameuse série de Leibniz.

La deuxième relation de notre lemme était $\sum \alpha_k^2 = A^2 - 2B$, ce qui donne pour notre fonction spécifique P la somme des inverses des carrés impairs, à savoir :

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{\pi^2}{32}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Euler en a déduit aisément la réponse au défi de Jakob Bernoulli. En effet,

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

N'est-ce pas beau ?