♦ **Exercice** 17 [**]

Soit $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire $h : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$h(e_1) = \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3, \qquad h(e_2) = 2\alpha_1 - 6\alpha_2 + 2\alpha_3$$
$$h(e_3) = \alpha_2 - \alpha_3, \qquad h(e_4) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6\alpha_3, \qquad h(e_5) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

a) On considère le vecteur $z \in \mathbb{R}^5$ défini par $z = 2e_1 - e_2 + e_3 + e_5$. Calculer $h(z)$.

b) Donner une base et la dimension de $Ker(h)$ et de $Im(h)$.

c) Donner l'ensemble des solutions de l'équation $h(x) = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$.

d) Existe-t-il $y \in \mathbb{R}^3$ tel que l'équation $h(x) = y$ n'admette pas de solutions ?

Exercice 18 [**]

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ be une base de E. Considérons l'endomorphisme k de E défini par

$$k(b_1) = b_1 + b_2 + b_3, \;\; k(b_2) = 2b_1 - b_2 + 2b_3, \;\; k(b_3) = 4b_1 + b_2 + 4b_3.$$

a) Donner $mat_{\mathcal{B}}(k)$.

b) Si $u \in E$ est un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, quelles sont les coordonnées de $k(u)$ dans la base $\mathcal{B}$?

c) Calculer $k(b_1 + 2b_2)$.

d) Trouver une base de $Ker(k)$ et $Im(k)$.

e) A-t-on $Ker(k) \oplus Im(k) = E$?

♦ **Exercice** 19 [**]

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application linéaire.

a) Montrer que, si $dim(A) > dim(B)$, alors f ne peut pas être injective.

b) Montrer un résultat similaire au précédent dans le cas où f est surjective.

c) Si f est un isomorphisme, que peut-on dire a propos de $dim(A)$ et $dim(B)$?

Exercice 20 [**]

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application linéaire et soientF_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de A. Pour chacune des affirmations suivantes, montrer si elles sont vraies ou fausses :

a) $f(F_1 \cap F_2) = f(F_1) \cap f(F_2)$.

b) $f(F_1 \cup F_2) = f(F_1) \cup f(F_2)$.

c) $f(F_1 + F_2) = f(F_1) + f(F_2)$.

d) $F_1 \subset F_2 \implies f(F_1) \subset f(F_2)$.

Exercice 17 [**] Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - 2I_3.$$

a) Calculer B^2, B^3 puis trouver une expression pour B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire ne expression pour A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Prouver que l'on a $A^3 - 6A^2 + 12A - 8I_3 = 0$.

d) En déduire que A est inversible et trouver A^{-1}.

Exercice 18 [**] **Calcul d'une intégrale grâce à l'algèbre linéaire**

Dans cet exercice, on va voir comment on peut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^2 x^3 e^x dx$$

en utilisant ce qu'on appris dans ce cours. On considère la famille de fonctions

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1(x) = e^x,\ b_2(x) = xe^x,\ b_3(x) = x^2e^x,\ b_4(x) = x^3e^x \right\}.$$

et on note par V le sous-espace vectoriel $V = Vect(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $Vect(\mathcal{B})$.

b) On considère maintenant l'application dérivée $D : V \longrightarrow V$ définie par $D(f) = f'$. Donner $mat(D)_{\mathcal{B}}$.

c) Montrer que D est un isomorphisme et calculer $(mat(D)_{\mathcal{B}})^{-1}$.

d) Utiliser cela pour trouver une primitive de x^3e^x et calculer l'intégrale I.

Exercice 19 [*] **Propriétés de la transposée**

Montrer que :

a) $\forall M \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R}), (M^t)^t = M$.

b) L'application transposée $^t : \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ est une application linéaire (en fait, il s'agit même d'un isomorphisme).

c) [***] $\forall M \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R}), \forall N \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{R}),\ (MN)^t = (N)^t(M)^t$.

d) M est inversible $\iff$ M^t est inversible.

e) Pour une matrice inversible $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $(M^{-1})^t = (M^t)^{-1}$.

Exercice 20 [***]

Soient S_n et A_n respectivement l'ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n antisymétriques.

a) Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$.

Exercice 21 [*] **Propriétés de la trace**

a) Par définition, la trace est une application $Tr : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que cette application est linéaire.

b) L'application Tr est-elle injective ? Surjective ?

c) [***] Montrer que la trace est *cyclique*, c-à-d : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$.