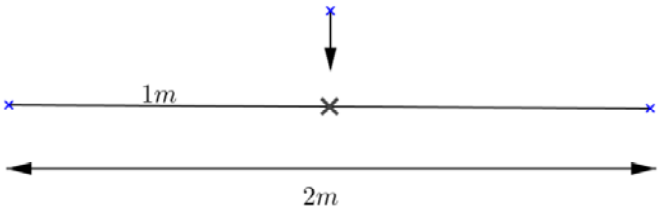
Proposition de corrigé des

Olympiades nationales de mathématiques 2017

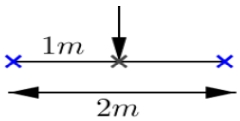
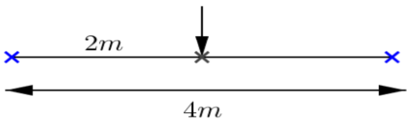
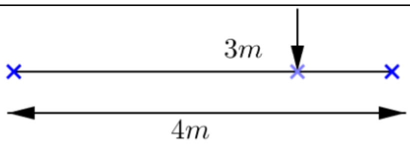
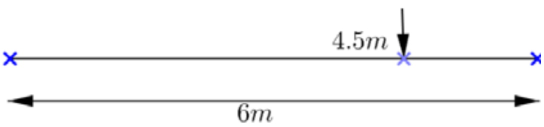
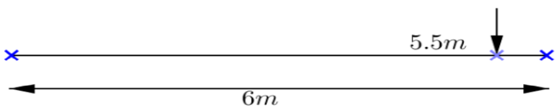
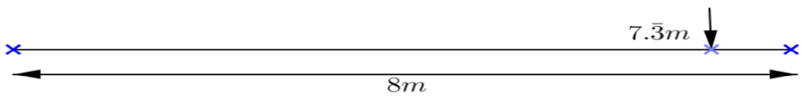
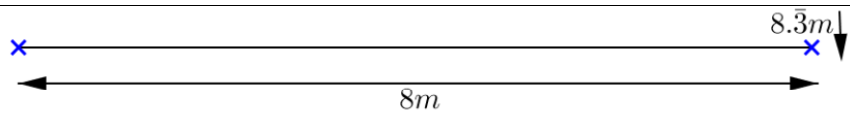
TRAVAIL PAR GROUPE DE TROIS

Exercice 1 : le ruban escargot.

Partie A : premiers pas



1. Puisque l'escargot parcourt 1m en 12h et puis se repose les 12h suivantes et puisque le ruban ne s'étire que pas pendant le repos de l'escargot, alors **en fin de la première journée** il aura effectué **1m.**
   Puisque le ruban s'étire uniformément et que l'escargot se trouve au milieu du ruban, alors le ruban s'étire de 1m de chaque côté. D'où **au début du jour 2**, l'escargot est à **2m** du point de départ.
2.

Fin jour 1		Distance au point de départ : 1 m
Début jour 2		Distance au point de départ : $1 + \frac{1}{2} \times 2 = 2$ m
Fin jour 2		Distance au point de départ : $2 + 1 = 3$ m
Début jour 3		Distance au point de départ : $3 + \frac{3}{4} \times 2 = 4.5$ m
Fin jour 3		Distance au point de départ : $4.5 + 1 = 5.5$ m
Début jour 4		Distance au point de départ : $5.5 + \frac{5.5}{6} \times 2 = 7.\bar{3}$ m
Fin jour 4		Distance au point de départ : $7.\bar{3} + 1 = 8.\bar{3}$ m

Donc **en fin du jour 4** l'escargot **sort** du ruban.

Partie B : modélisation

1. $L(n+1) = L(n) + 4$, donc $L(n)$ est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $L(1) = 4$. Par suite, $L(n) = 4 + 4(n-1) \Rightarrow L(n) = 4n$.

   Distance parcourue au début du jour n = P_n , on sait que :

   $P_{n+1} = P_n$ + 1m effectué par l'escargot + dilatation du tronçon derrière l'escargot

   $= P_n + 1 + 4 \times \dfrac{P_n + 1}{L(n)}$.

   $$L(n+1) - D(n+1) = L(n) - D(n) + 1 + 4 \times \frac{L(n) - D(n) + 1}{4n}$$

   $$4(n+1) - D(n+1) = 4n - D(n) + 1 + \frac{4n - D(n) + 1}{n}$$

   $$4n + 4 - D(n+1) = 4n - D(n) + 1 + 4 - \frac{D(n)}{n} + \frac{1}{n}$$

   $$D(n+1) = D(n) + \frac{D(n)}{n} - \frac{1}{n} - 1$$

   $$D(n+1) = (1+\frac{1}{n})D(n) - (1+\frac{1}{n})$$

   $$D(n+1) = (1+\frac{1}{n})(D(n) - 1)$$

2. $U(n+1) = \dfrac{D(n+1)}{n+1} = \dfrac{(1+\frac{1}{n})(D(n) - 1)}{n+1} = \dfrac{n+1}{n} \times (D(n) - 1) \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{D(n) - 1}{n} = \dfrac{D(n)}{n} - \dfrac{1}{n}$

   D'où, $U(n+1) = U(n) - \dfrac{1}{n}$.

   $$\cancel{U(2)} = U(1) - 1$$

   $$\cancel{U(3)} = \cancel{U(2)} - \frac{1}{2}$$

   $$\cancel{U(4)} = \cancel{U(3)} - \frac{1}{3}$$

   $$\cancel{U(5)} = \cancel{U(4)} - \frac{1}{4}$$

   $$\vdots$$

   $$U(n) = \cancel{U(n-1)} - \frac{1}{n-1}$$

En additionnant on obtient : $U(n) = U(1) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1})$

$$U(n) = 4 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1})$$

D'où $D(n) = nU(n) = n[4 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1})]$. $\quad (n \geq 2)$

3. n reçoit 2
   s reçoit 1
   d reçoit n[4-s]
   Tant que d>1
      n reçoit n+1
      s reçoit $s+\frac{1}{n-1}$
      d reçoit n[4-s]
   Fin Tant que
   Afficher n
4. A l'aide de l'algorithme, on obtient que l'escargot arrivera à la fin du **31ème jour** à l'extrémité du ruban.

<u>Exercice 2 : A vos palettes !</u>

1. MO : $B^2J^1R^3V^2 = B^1B^1J^1RR^2V^2 = X^{2+4}B^1R^1 = X^6B^1R^1$.
2. $b+j+r+v = 2017$.
   Si au moins un de ces nombres est pair alors leur produit sera pair. Supposons qu'aucun n'est pair, alors on peut écrire :
   $2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 + 2k_3 + 1 + 2k_4 + 1 = 2017 \Rightarrow 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 2013$, ce qui est impossible.
   D'où, bjrv est certainement pair.
3. b, j, r et v appartiennent à {1; 2; 3; 5; ….}. Puisque leur somme est 7 alors on a 2 possibilités :
   - $(1 ; 1 ; 2 ; 3) \Rightarrow$ MO : $B^1J^1R^2V^3 = B^1J^1R^2V^2V^1 = X^6V^1$.
   - $(1 ; 2 ; 2 ; 2) \Rightarrow$ MO : $B^1J^2R^2V^2 = B^1J^1J^1R^2V^2 = X^6J^1$.
4. a) $k = \frac{r-b}{2} \Rightarrow r = 2k + b$.

   $j = \frac{b+r}{2} = \frac{b + 2k + b}{2} = b + k$.

$r = \frac{j+v}{2} \Rightarrow v = 2r - j = 4k + 2b - b - k = 3k + b.$

b) $b + 2k + b + b + k + 3k + b = 2017 \Rightarrow 4b + 6k = 2017 \Rightarrow 2(2b + 3k) = 2017$, ce qui est impossible.

5. $B^2B^jJ^jR^rV^rV^1 = X^{2j+2r}B^2V^1 = X^4B^2V^1 \Rightarrow 2j + 2r = 4 \Rightarrow j + r = 2 \Rightarrow j=r=1$ (j et r étant entiers non nuls). D'où, $B^3J^1R^1V^2$.

6. $\frac{1}{b} + \frac{1}{j} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{j+b}{jb} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{j+b}{r} = \frac{2}{r} \Rightarrow j+b = 2 \Rightarrow j=b=1$ et donc, $r=1$ et $v=1$.

   D'où, MO : $B^1j^1R^1V^1 = X^4$.

7. $\frac{j}{7} = \frac{r}{j} = \frac{v}{r} = k$ donc, $j = 7k$, $r = jk = 7k^2$, $v = rk = jk^2 = 7k^3$.

   $7 + 7k + 7k^2 + 7k^3 = 105 \Rightarrow k^3 + k^2 + k + 1 = 15$, avec la calculatrice on trouve que $k = 2$.

   Alors, $j = 14$, $r = 28$ et $v = 56$.

   D'où, MO : $B^7J^{14}R^{28}V^{56} = B^7J^7J^7R^{28}V^{28}V^{28} = X^{70}J^7V^{28}$.

8. $b^2 + j^2 + r^2 = bj + jr + rb \Rightarrow b^2 + j^2 + r^2 - bj - jr - rb = 0$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{j^2}{2} + \frac{j^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} - bj - jr - rb = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+j^2}{2} - bj + \frac{j^2+r^2}{2} - jr + \frac{r^2+b^2}{2} - rb = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+j^2-2bj}{2} + \frac{j^2+r^2-2jr}{2} + \frac{r^2+b^2-2rb}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(b-j)^2}{2} + \frac{(j-r)^2}{2} + \frac{(r-b)^2}{2} = 0 \Rightarrow b-j = 0 \text{ et } j-r = 0 \text{ et } r-b = 0 \Rightarrow b=j=r$$

$b + j + r + v = 12b \Rightarrow b + b + b + v = 12b \Rightarrow v = 9b.$

D'où, $B^bJ^jR^rV^v = B^bJ^bR^bV^{9b} = B^bJ^bR^bV^bV^{8b} = X^{4b}V^{8b}$.