Proposition de corrigé des

Olympiades nationales de mathématiques 2018

EXERCICES NATIONAUX

Exercice 1 : Géométrie de l'à peu près.

Mesures d'angles à peu près

1. a. $90° \in [75°,105°]$ donc un triangle rectangle est aussi à peu près rectangle.

Comme les angles à la base d'un triangle isocèle diffèrent de 0, alors un triangle isocèle est aussi à peu près isocèle.

b. Un triangle ne peut pas être rectangle en 2 sommets puisque la somme des angles est 180°.
Un triangle peut être à peu près rectangle en 2 sommets, ex : (81°,80°,19°) .
L'exemple (76°,75°,29°) montre qu'un triangle acutangle à peu près rectangle, peut être aussi à peu près isocèle.

2. (89° ;59°,32°) est à peu près rectangle mais pas à peu près isocèle.
(74° ,73° ,33°) est à peu près isocèle mais pas à peu près rectangle.
Un triangle acutangle ne peut pas être ni l'un ni l'autre :

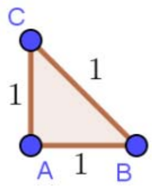
- Supposons que ABC, qui est acutangle, n'est pas à peu près isocèle tel que $\widehat{C}$ est le plus petit des 3 angles et vérifions qu'il doit être à peu près rectangle.
  Dans ce cas,la différence entre $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ est supérieure à 15 ainsi que la différence entre $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
  Si ABC n'était pas à peu près rectangle, alors $\widehat{A}$ devrait être strictement inférieur à 75°. Donc $\widehat{B}$ strictement inférieur à 60° et $\widehat{C}$ strictement inférieur à 45°, ce qui ne fait pas un total de 180°.
  D'où ABC est forcément à peu près rectangle.

- Supposons que ABC, qui est acutangle, n'est pas à peu près rectangle et vérifions qu'il doit être à peu près isocèle.
  $\widehat{A}$ doit être dans ce cas strictement inférieur à 75°.
  Si ABC n'était pas à peu près isocèle, alors $\widehat{B}$ devrait être strictement inférieur à 60 et

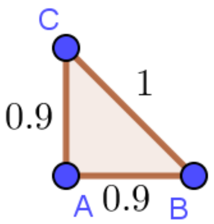
$\widehat{C}$ strictement inférieur à 45, ce qui ne fait pas un total de 180°.
D’où ABC est forcément à peu près isocèle.

3. Saisir A
Saisir B
C reçoit 180-A-B
Si |A-B| ≤ 15 ou |A-C| ≤ 15 ou |B-C| ≤ 15
Alors afficher « A peu près isocèle »
Sinon afficher « Non à peu près isocèle »
FinSi

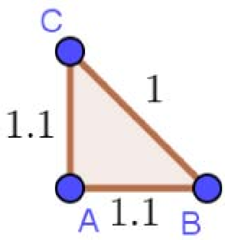
Mesures de longueurs à peu près

4. a. 

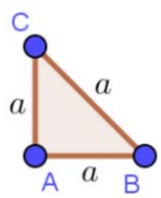
$1^2 + 1^2 \neq 1^2$ donc impossible,



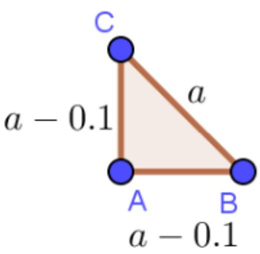
$0.9^2 + 0.9^2 \neq 1^2$ donc impossible,



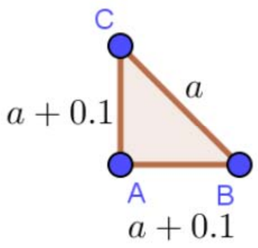
$1.1^2 + 1.1^2 \neq 1^2$ donc impossible.

b. 

$a^2 + a^2 \neq a^2$, donc impossible pour $a \neq 0$,



$(a-0.1)^2 + (a-0.1)^2 = 2a^2 - 0.4a + 0.02 = a^2$ pour $a = 0.2 - 0.1\sqrt{2}$
ou $a = 0.2 + 0.1\sqrt{2}$,



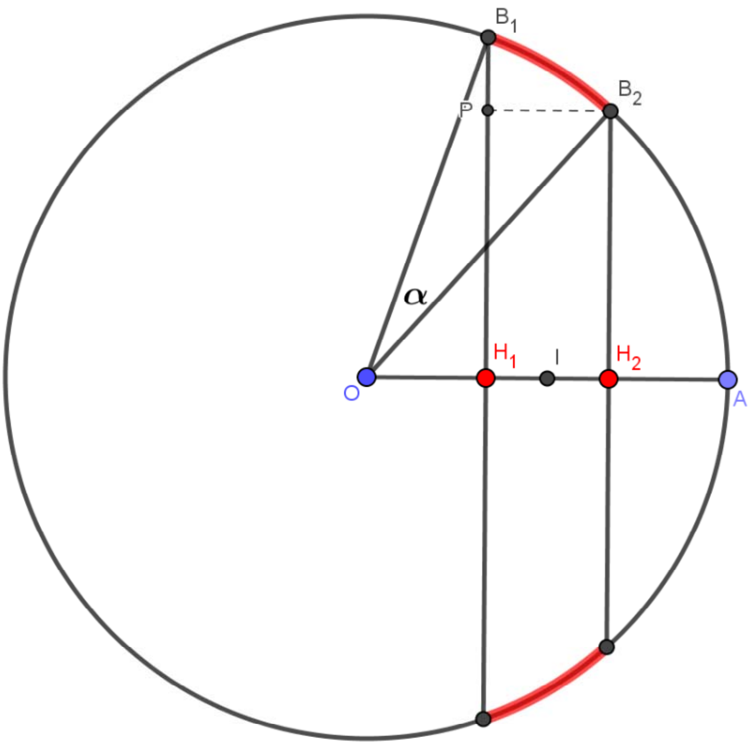
$(a+0.1)^2 + (a+0.1)^2 = 2a^2 + 0.4a + 0.02 = a^2$; impossible car a_1 et a_2 sont négatifs.

Conclusion : on peut trouver AB = AC = $0.1 - 0.1\sqrt{2}$ et BC = $0.2 - 0.1\sqrt{2}$ ou bien

AB = AC = $0.1 + 0.1\sqrt{2}$ et BC = $0.2 + 0.1\sqrt{2}$

Remarque pour une différence de longueur inférieure à 0.1 on peut noter aussi le triplet pythagoricien suivant :(0.03 ; 0.04 ; 0.05), $0.05^2 = 0.03^2 + 0.04^2$.

5. a.



$OA=OB_1=OB_2=2$

$OI=IA=1$

$IH_1=IH_2=0.1$

$OH_1=AH_2=0.9$

$H_1B_1=\sqrt{OB_1{}^2 - OH_1{}^2} \cong 1.79$

$H_2B_2=\sqrt{OB_2{}^2 - OH_2{}^2} \cong 1.67$

$PB_1 = H_1B_1 - H_2B_2 \cong 0.12$

$B_1B_2 \cong \sqrt{PB_1{}^2 + PB_2{}^2} \cong 0.23$

La longueur d'un arc rouge est alors approximativement égale à 0.23.

D'où la longueur des 2 arcs rouges est 0.46.

Remarque : On aurait pu calculer cette longueur en appliquant la formule suivante :

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{B_1B_2}{2}}{\text{rayon}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \cong 0.058 \Rightarrow \alpha \cong 0.117 \text{ rad} \Rightarrow$ Longueur de $\widehat{B_1B_2}$= rayon $\times\ \alpha \cong 0.23$.

b. $B \in \widehat{B_1B_2} \Rightarrow AB_2 < AB < AB_1$,

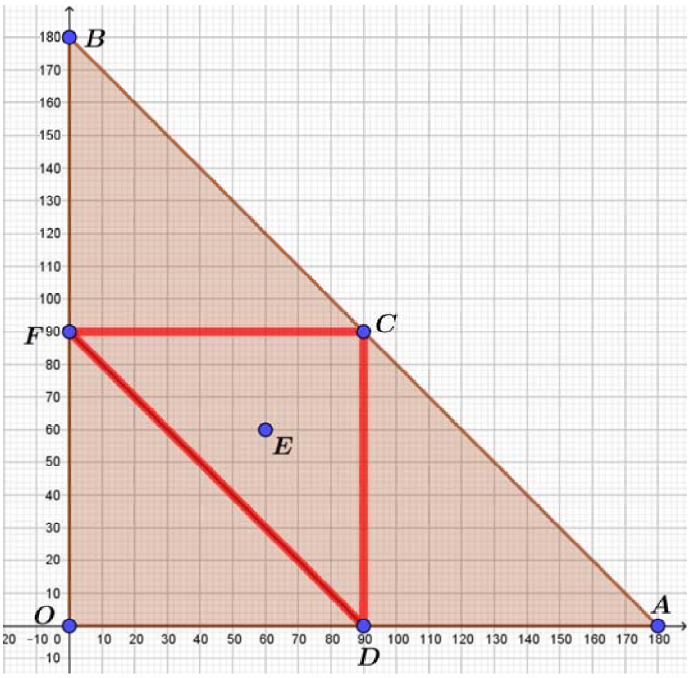
Or $AB_2 = \sqrt{H_2B_2{}^2 + AH_2{}^2} = \sqrt{3.6}$ et $AB_1 = \sqrt{H_1B_1{}^2 + AH_1{}^2} = \sqrt{4.4}$

$\Rightarrow \sqrt{3.6} < AB < \sqrt{4.4}$

Avec OA = OB = 2, d'où OAB n'est pas à peu près équilatéral.

Une statistique sur la population des triangles

6. a, b et c



Si x=180 alors y=0 $\Rightarrow$ le point A

Si y=180 alors x=0 $\Rightarrow$ le point B

En supposant que le troisième angle est suffisamment petit, alors on pourrait écrire

x + y = 180 $\Rightarrow$ y=180-x, d'où le segment [AB].

Dans le cas où le troisième angle n'est pas négligeable on aura x+y<180, d'où c'est la région colorée en marron cad le triangle OAB = domaine $\mathscr{T}$.

L'ensemble des points représentant les triangles rectangles est la réunion des 3 segments colorés en rouge (le segment [DC] est lorsque x = 90, le segment [FC] est lorsque y = 90 et le segment [FD] est lorsque x+ y = 90).

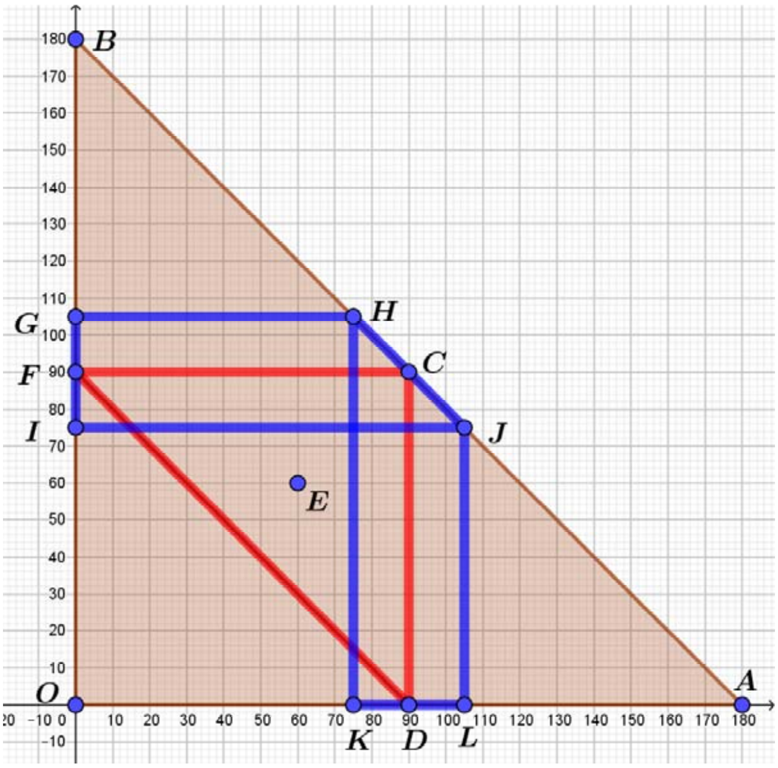
7. a. $\mathscr{A}$ est le domaine à l'intérieur du triangle DCF.

b. aire de $\mathscr{T} = \dfrac{180\times180}{2}$ = 16200

aire de $\mathscr{A} = \dfrac{90\times90}{2}$ = 4050

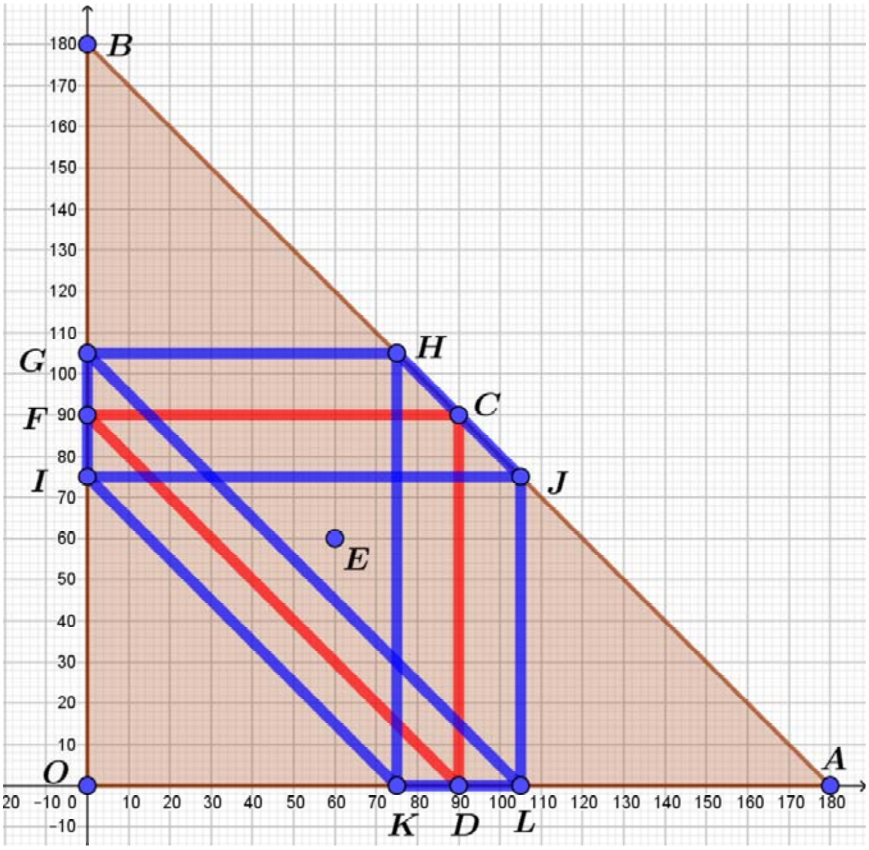
p = $\dfrac{4050}{16200} = \dfrac{1}{4}$.

8.



Si le triangle est à peu près rectangle en x alors ceci est représenté par le trapèze KLJH $\cap$ $\mathscr{A}$.

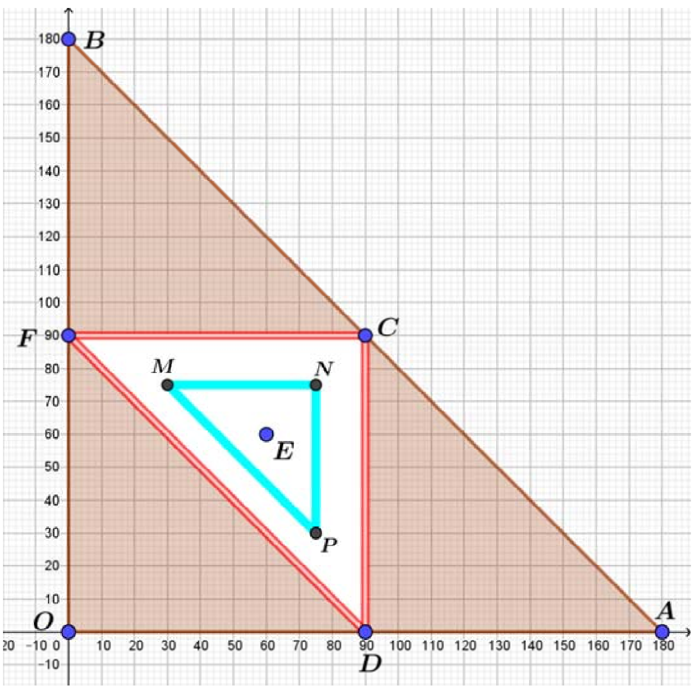
Si le triangle est à peu près rectangle en y alors ceci est représenté par le trapèze GIJH $\cap$ $\mathscr{A}$.



Si le triangle est à peu près rectangle en z (cad x+y=90) alors ceci est représenté par le trapèze KLGI $\cap\ \mathscr{A}$.

D'où

$\mathscr{R}$ est le triangle DCF duquel on enlève le triangle MNP :



Ainsi l'aire totale de $\mathscr{R} = \frac{90\times90}{2} - \frac{45\times45}{2} = \frac{6075}{2}$

Alors la proportion des acutangles est $\dfrac{\frac{6075}{2}}{16200} = \frac{3}{16}$.

Exercice 2 : Ensembles arithmétiques.

1. a. $S_1 = \{0\ ,1\ ,2\}$ est un EA car $1=\frac{0+2}{2}$, ainsi au couple (0 ;1) on peut associer 2 qui $\in S_1$, au couple (0 ;2) on peut associer 1 qui $\in S_1$ et finalement au couple (1 ;2) on peut associer 0 qui $\in S_1$.

   $S_2 = \{0,1,2,3\}$ n'est pas un EA car au couple (0 ;3) on ne peut associer ni $\frac{2}{3}$,ni 6 et ni -3

   $S_3 = \{0,1,2,4\}$ n'est pas un EA car au couple (1 ;4) on ne peut associer ni $\frac{5}{2}$,ni 7 et ni -2

   $S_4 = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$ est un EA car

Au couple (a ;b) on associe	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
2	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{7}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$

b. E = {a,b} n'est pas un EA car $\frac{a+b}{2} \neq$ a et $\frac{a+b}{2} \neq$ b.

E = {a} est un EA car $\frac{a+a}{2}$ = a.

c. E = {0, $\frac{2}{3}$, 1 , $\frac{4}{3}$, 2} est un exemple d'un EA contenant 0, 1 et 2 et ayant 5 éléments :

Au couple (a ;b) on associe	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	2
0	0	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$
1	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0
$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	2

2. a. c = $\frac{a+b}{2}$, a = $\frac{b+c}{2}$ ou b = $\frac{a+c}{2}$.

b. fonction TesterEA{S = [S[1],……….,S[n]], n}

Résultat ← Vrai

Pour i de 1 à n

Pour j de 1 à n

Si Appartient($\frac{S(i)+S(j)}{2}$, S) = Faux ou Appartient(2S(j)-S(i),S)=Faux ou Appartient(2S(i)-S(j),S)=Faux

alors Résultat ← Faux

FinSi

FinPour

FinPour

Afficher Résultat

c. Ci-dessous est un programme qui utilise moins d'opérations et donc qui fait un test uniquement sur les cellules contenues – voir tableau ci-dessus - dans le triangle rouge moins la diagonale (et dont le nombre est $\frac{n^2-n}{2}$).

fonction TesterEA{S = [S[1],……….,S[n]], n}

i reçoit 1

j reçoit 2

c reçoit 0

Tant que Appartient($\frac{S(i)+S(j)}{2}$, S) = Vrai ou Appartient(2S(j)-S(i),S)=Vrai ou Appartient(2S(i)-S(j),S)=Vrai

c reçoit c+1

Si j < n

alors j reçoit j+1

sinon si i < n

alors i reçoit i+1

j reçoit i+1

FinSi

FinSi

FinTantque

Si c < $\frac{n^2-n}{2}$

alors afficher « Résultat faux »

sinon afficher « Résultat vrai »

FinSi

3. Vérifions cette propriété sur $S_4 = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$, $m = \frac{1}{2}$ et $M = \frac{7}{2}$ donc M-m = 3.

à $\frac{1}{2}$ on associe $\frac{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})}{3} = 0$

à $\frac{3}{2}$ on associe $\frac{2(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})}{3} = \frac{2}{3}$

à 2 on associe $\frac{2(2-\frac{1}{2})}{3} = 1$

à $\frac{5}{2}$ on associe $\frac{2(\frac{5}{2}-\frac{1}{2})}{3} = \frac{4}{3}$

à $\frac{7}{2}$ on associe $\frac{2(\frac{7}{2}-\frac{1}{2})}{3} = 2$.

Alors à S_4 on peut associer un EA qui est $S_4' = \{0,\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},2\}$

Démontrons cette propriété :

la fonction f : $x \to \dfrac{2(x-m)}{M-m}$ est une affine strictement croissante, par suite S' et S ont le même nombre d'éléments.

min de f = $\dfrac{2(m-m)}{M-m}$ = 0, max de f = $\dfrac{2(M-m)}{M-m}$ = 2

Donc f(S) = S' $\subset$ [0,2] et S' contient 0 et 2 alors S' contient aussi 1 (1 = $\dfrac{0+2}{2}$) puisque S' est aussi un EA comme je vais le démontrer ci-dessous :

S est un EA alors à tout couple (a;b) on peut trouver dans S un élément c tel que :

c = $\dfrac{a+b}{2}$ ou c = 2a – b (cad a = $\dfrac{b+c}{2}$) ou c = 2b – a (cad b = $\dfrac{a+c}{2}$)

Soit A,B et C les images respectives dans S'de a, b et c par f :

A = $\dfrac{2(a-m)}{M-m}$, B = $\dfrac{2(b-m)}{M-m}$ et C = $\dfrac{2(c-m)}{M-m}$

<u>1er cas :</u> si c = $\dfrac{a+b}{2}$ cad a+b = 2c

A tout couple (A ;B) on peut associer $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{2(a-m)+2(b-m)}{2(M-m)} = \dfrac{a-m+b-m}{M-m} = \dfrac{2(c-m)}{M-m}$ = C qui $\in$ S'.

<u>2ème cas:</u> si c = 2a – b.

A tout couple (A ;B) on peut associer 2A-B = $\dfrac{4(a-m)-2(b-m)}{M-m} = \dfrac{2(2a-b)-2m}{M-m} = \dfrac{2c-2m}{M-m}$

$= \dfrac{2(c-m)}{M-m}$ = C qui $\in$ S'.

<u>3ème cas :</u> si c = 2b – a.

A tout couple (A ;B) on peut associer 2B-A = $\dfrac{4(b-m)-2(a-m)}{M-m} = \dfrac{2(2b-a)-2m}{M-m} = \dfrac{2c-2m}{M-m}$

$= \dfrac{2(c-m)}{M-m}$ = C qui $\in$ S'.

Conclusion : S' est aussi un EA.

4. Si $x \in$ S et 0 < x < 1 ,

Au couple (x;2) on ne peut pas associer le nombre c = 2(2) – x = 4 – x (cad 2 = $\dfrac{x+c}{2}$)

car dans ce cas c n'appartiendrait pas à [0,2].

De même au couple (x;2) on ne peut pas associer le nombre c = $2x - 2$ (cad $x = \frac{c+2}{2}$)

car dans ce cas c n'appartiendrait pas à [0,2].

Donc au couple (x ;2) on ne peut associer que $\frac{x+2}{2}$ qui appartient à S.

Si $x \in$ S et $1 < x < 2$,

Au couple $(0; x)$ on ne peut pas associer le nombre c = $2x$ - 0 (cad $x = \frac{0+c}{2}$) car dans ce cas c n'appartiendrait pas à [0,2].

De même au couple $(0; x)$ on ne peut pas associer le nombre c = $0 - x$ (cad $0 = \frac{c+x}{2}$) car dans ce cas c n'appartiendrait pas à [0,2].

Donc au couple $(0; x)$ on ne peut associer que $\frac{x+0}{2} = \frac{x}{2}$ qui appartient à S.

Par suite il n'y a pas d'EA comportant 4 éléments car si le 4ème est entre 0 et 1 ou entre 1 et 2, il doit y avoir dans S, $\frac{x+2}{2}$ ou $\frac{x}{2}$.

5. a. $a_1 \in S$ et $0 < a_1 < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a_1+2}{2} \in S$

or $0 < a_1 < \frac{2}{3} \Rightarrow 2 < a_1 + 2 < \frac{8}{3} \Rightarrow 1 < \frac{a_1+2}{2} < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\frac{a_1+2}{2}}{2} = \frac{a_1+2}{4} \in S$

or $0 < a_1 < \frac{2}{3} \Rightarrow 2 < a_1 + 2 < \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{a_1+2}{4} < \frac{2}{3}$

Donc $\boxed{a_2 = \frac{a_1+2}{4}}$

Il reste à vérifier que $a_2 > a_1$:

$a_2 - a_1 = \frac{a_1+2}{4} - a_1 = \frac{-3a_1+2}{4}$

or $0 < a_1 < \frac{2}{3} \Rightarrow -2 < -3a_1 < 0 \Rightarrow 0 < -3a_1 + 2 < 2 \Rightarrow 0 < \frac{-3a_1+2}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 - a_1 > 0$

D' où si $a_1 \in S$ avec $0 < a_1 < \frac{2}{3}$, il existe $a_2 \in S$ tel que $a_2 = \frac{a_1+2}{4}$ avec $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$.

Ainsi on obtiendrait une infinité de nombres entre 0 et $\frac{2}{3}$, mais d'après l'hypothèse S est à n éléments (S est fini), donc S ne contient aucun nombre strictement compris entre 0 et $\frac{2}{3}$.

b. $a_1 \in S$ et $\frac{2}{3} < a_1 < 1 \Rightarrow \frac{a_1 + 2}{2} \in S$

or $\frac{2}{3} < a_1 < 1 \Rightarrow \frac{8}{3} < a_1 + 2 < 3 \Rightarrow \frac{4}{3} < \frac{a_1 + 2}{2} < \frac{3}{2}$ cad $1 < \frac{a_1 + 2}{2} < 2 \Rightarrow$

$\frac{\frac{a_1 + 2}{2}}{2} = \frac{a_1 + 2}{4} \in S$

or $\frac{2}{3} < a_1 < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{a_1 + 2}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{a_1 + 2}{4}}$

Il reste à vérifier que $a_2 > a_1$:

$a_2 - a_1 = \frac{-3a_1 + 2}{4}$

or $\frac{2}{3} < a_1 < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < a_2 - a_1 < 0 \Rightarrow a_2 < a_1$.

D'où si $a_1 \in S$ avec $\frac{2}{3} < a_1 < 1$, il existe $a_2 \in S$ tel que $a_2 = \frac{a_1 + 2}{4}$ avec $\frac{2}{3} < a_2 < a_1 < 1$.

Même conclusion qu'en a.

c. $0 \quad \underbrace{vide} \quad \frac{2}{3} \quad \underbrace{vide} \quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad 2$, d'où $n \leq 5$

6. n = 5 ou n = 3 ou n = 1.

<u>Exercice 3 : Boules de même couleur.</u>

1. a. Card $\Omega = 10\times9 = 90$

   Card (BB) = $4\times3 = 12$

   Card (NN) = $6\times5 = 30$

   donc $p(G) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

   b. Card $\Omega = 12\times11 = 132$

   Card (BB) = $4\times3 = 12$

   Card (NN) = $6\times5 = 30$

   Card (NN) = $2\times1 = 2$

   donc $p(G) = \frac{44}{132} = \frac{1}{3}$.

2. a. L'urne contient $6 + x$ boules

   Card $\Omega = (6+x)(5+x)$

Card (BB) = $x(x\text{-}1)$

Card (RR) = $6\times5 = 30$

donc p(G) = $\dfrac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$.

b. $\dfrac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 10$

Donc soit 3 boules blanches, soit 10 boules blanches.

3. a. Card Ω = (a+b)(a+b-1) = n(n-1)

   Card (RR) = a(a-1)

   Card (BB) = $b(b\text{-}1)$

   donc p(G) = $\dfrac{\mathrm{a(a-1)}+b(b-1)}{\mathrm{(a+b)(a+b-1)}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 - a - b - 2ab = 0 \Rightarrow (a\text{-}b)^2 - (a+b) = 0$

   $\Rightarrow (a+b) = (a\text{-}b)^2 \Rightarrow n = (a\text{-}b)^2$.

   b. $n = p^2 \Rightarrow$ Card $\Omega = p^2(p^2\text{-}1)$

   Card (RR) = a(a-1)

   Card (BB) = $b(b\text{-}1)$

   donc p(G) = $\dfrac{a(a-1)+b(b-1)}{p^2(p^2-1)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2(a^2 - a + b^2 - b) = p^2(p^2\text{-}1)$

   $\Rightarrow 2(a^2 + b^2 - a - b) = p^2(p^2\text{-}1)$

   $\Rightarrow 2[a^2 + (p^2\text{-}a)^2 - a - (p^2\text{-}a)] = p^2(p^2\text{-}1)$

   $\Rightarrow 2(2a^2 - 2ap^2 + p^4 - p^2) = p^4 - p^2$

   $\Rightarrow 4a^2 - 4ap^2 + p^4 - p^2 = 0$

   $\Delta = 16p^2 \Rightarrow (a;b) = (\dfrac{p^2-p}{2}; \dfrac{p^2+p}{2})$ ou $(a;b) = (\dfrac{p^2+p}{2}; \dfrac{p^2-p}{2})$

   or $a \geq b$ donc $(a;b) = (\dfrac{p^2+p}{2}; \dfrac{p^2-p}{2})$

   c. si p=2 alors (a;b) = (3 ;1)

   si p=3 alors (a;b) = (6 ;3)

   si p=4 alors (a;b) = (10 ;6)

   si p=5 alors (a;b) = (15 ;10)

   si p=6 alors (a;b) = (21 ;15)

   si p=7 alors (a;b) = (28 ;21)

4. a. a+b+c = 13 $\Rightarrow$ Card $\Omega = 13\times12 = 156$

   Card (BB) = $a(a\text{-}1)$

   Card (RR) = $b(b\text{-}1)$

   Card (NN) = $c(c\text{-}1)$

   p(G) = $\dfrac{a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c}{156} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $2(a^2 + b^2 + c^2 – (a+b+c))=156$

$\Rightarrow$ $2(a^2 + b^2 + c^2 – 13)=156$

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 =91$

a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} a+b+c=13 \\ a^2+b^2+c^2=91 \end{cases}$

$a+b=13-c \Rightarrow a^2+b^2+2ab=169-26c+c^2$

or $a^2+b^2=91-c^2$ $\Rightarrow$ $91-c^2+2ab = 169-26c+c^2$ $\Rightarrow$ $ab = 39-13c+c^2$.

Alors $\begin{cases} a+b=13-c \\ ab = c^2-13c+39 \end{cases}$

Donc a et b sont solutions de $X^2 – (13-c)X + c^2 – 13c +39 =0$

$\Delta = -3c^2 + 26c +13$

$\Delta_c = 2^6 \times 13 \Rightarrow c_1 = \dfrac{13+4\sqrt{13}}{3}$ et $c_2 = \dfrac{13-4\sqrt{13}}{3}$

alors $\Delta \geq 0$ pour $c \in \left[\dfrac{13-4\sqrt{13}}{3} ; \dfrac{13+4\sqrt{13}}{3}\right]$

et comme c est un entier alors $c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Si par exemple $c = 3 \Rightarrow \Delta = 64 \Rightarrow X^2 – 10X + 9 = 0 \Rightarrow$ a=1 et b=9

D'où une configuration possible (a;b;c) = (1;9;3)

b. $(x ;y ;z)$ conduit à un jeu équitable $\Rightarrow$ Card $\Omega = (x+y+z)(x+y+z-1)$

$$p(G) = \frac{x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)}{(x+y+z)(x+y+z-1)} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $(x-y)^2 – (x+y) + z^2 – 2z(x+y) – z = 0$

$\Rightarrow$ $0 + z^2 – 2z(x+y) – z = 0$ $\Rightarrow$ $z – 2(x+y) – 1 = 0$ (z étant $\neq 0$)

D'où $z = 2x + 2y + 1$ qui est une valeur unique.

c. $(x ;y ;z)$ tel que $\begin{cases} x+y = (x-y)^2 \\ z = 2x+2y+1 \end{cases}$

D'après 3 c) on a la possibilité $x=6$ et $y=3$ alors $z = 19$

D'où une possibilité est (6;3;19)

5. $(1 ;3 ;9 ;\ldots\ldots ;3^{m-1})$ $\Rightarrow$ $n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots\ldots + 3^{m-1} = \dfrac{1-3^m}{1-3} = \dfrac{3^m}{2} - \dfrac{1}{2}$

$$p(G) = \frac{1\times0 + 3\times2 + 9\times8 + \ldots\ldots + 3^{m-1}(3^{m-1}-1)}{\left(\frac{3^m}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3^m}{2}-\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{3(3-1)+3^2(3^2-1)+3^3(3^3-1)+\cdots+3^{m-1}(3^{m-1}-1)}{\frac{3^{2m}}{4}-\frac{3}{4}\times3^m-\frac{1}{4}\times3^m+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3^2+3^4+3^6+\cdots+3^{2m-2}-3-3^2-3^3-\cdots-3^{m-1}}{\frac{3^{2m}}{4}-3^m+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{(3^2)^1+(3^2)^2+(3^2)^3+\cdots+(3^2)^{m-1}-(3+3^2+3^3+\cdots+3^{m-1})}{\frac{3^{2m}}{4}-3^m+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{9\times\frac{1-9^{m-1}}{1-9}-3\times\frac{1-3^{m-1}}{1-3}}{\frac{3^{2m}}{4}-3^m+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{9^m}{8}-\frac{9}{8}+\frac{3}{2}-\frac{3^m}{2}}{\frac{3^{2m}}{4}-3^m+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3^{2m}+3-4\times3^m}{8(\frac{3^{2m}}{4}-3^m+\frac{3}{4})}$$

$$= \frac{3^{2m}-4\times3^m+3}{2\times3^{2m}-8\times3^m+6}$$

$$= \frac{3^{2m}-4\times3^m+3}{2(3^{2m}-4\times3^m+3)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

D’où c’est un jeu équitable.