A6-00075
237640
Maths S

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 39 | **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématique S Em Lyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

Partie A

1)

(1a) Fixons $t \in]0, +\infty[$

On a $\ln(t+1) - \ln t = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$

Posons $\varphi_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$u \mapsto \ln(1+u) - u$

φ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$\varphi_1' : u \mapsto \frac{1}{1+u} - 1 \leq 0$

φ_1 est donc décroissante et on a $\forall u \geq 0, \varphi_1(u) \leq \varphi_1(0) = 0$
Donc : $\forall u, \varphi_1(u) \leq 0$

en particulier : $\varphi_1\left(\frac{1}{t}\right) \leq 0$

Posons $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$t \mapsto \ln(t+1) - \ln t - \frac{1}{t+1}$.

$\varphi_2' : t \mapsto \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{t(t+1) + t - (t+1)^2}{t(t+1)^2}$

D'où :

$$\varphi_2' : t \mapsto -\frac{1}{t(t+1)^2} \leq 0$$

φ_2 est donc décroissante et $\lim_{+\infty} \varphi = 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_2(t) \geq 0$ (théorème de la limite monotone)

En combinant les deux résultats :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln t \leq \frac{1}{t}.$$

(1b)

Pour u :

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$

Or, d'après (1a) appliqué à $t = n+2$:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \geq -\frac{1}{n+1}$$

Car $-\frac{1}{t} \leq \ln\left(1 - \frac{1}{t+1}\right) \leq -\frac{1}{t+1}$

d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$

~~* Pour (u_n) :~~

$u_{n+1} + \ln(n+2) - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n + \ln(n+1)$

~~d'où~~

(u_n) est donc croissante

*Pour v

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

(v_n) est donc décroissante.

On :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, -u_n + v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par continuité de ln en 1

u et v sont donc adjacentes donc elles convergent vers la même limite ℓ.

2) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après (1a), on a :

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

Par somme et télescopie :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

d'où $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}.$$

En divisant par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \neq 1$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \leq \frac{\ln n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \leq 1 - \frac{1}{n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.

Or, par le théorème de Riemann, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ ($\alpha = 1 \leq 1$)

Donc par encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = 1$$

D'où : $\ln n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3)

(3a) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après (1b) $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante et converge vers } \gamma. \\ (v_n) \text{ est décroissante et converge vers } \gamma \end{cases}$

Donc par le théorème de la limite monotone :

$u_n \leq \gamma \leq v_n$.

Et :

$$\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| = \left| \frac{1}{2}(v_n - \gamma) + \frac{1}{2}(u_n - \gamma) \right|$$

$$\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{Inégalité}}{\leq}} \frac{1}{2}\left(|v_n - \gamma| + |u_n - \gamma| \right)$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 39 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S Em Lyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Et donc, car $u_n \leq \gamma \leq v_n$

$$\left|\frac{u_n+v_n}{2} - \gamma\right| \leq \frac{1}{2}\left(v_n - \gamma - (u_n - \gamma)\right) = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

(3b) function gamma = approx()
u = 1 - log(2)
v = 1 ; n = 1
while (1/2)*(v-u) > 10^(-5)
u = u + 1/(n+1) + log(1 - 1/(n+2)) // u_{n+1} en fonction de u_n (1b)
v = v + 1/(n+1) + log(1 - 1/(n+2)) // v_{n+1} en fonction de v_n (1b)
n = n + 1
end
gamma = (u+v)/2 (3a)

Partie B -

4) Fixons $x \in \mathbb{R}_+$.

On a : $\forall k \geq 1$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{x}{k(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$ si $x \neq 0$

$= 0$ si $x = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or, $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc par comparaison de séries à termes généraux positifs :

$$\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \text{ converge.}$$

5)

(5a) On a $S(0) = \sum_{k=1}^{0} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) = 0$.

Par télescopie : $S(1) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 1$.

(5b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}\right)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} \quad \text{(pairs et impairs)}$$

On en déduit alors :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}.$$

* Et :

$$2-2\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}=2-\frac{2}{2n+1}-2\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{1}{k}$$

$$\overset{i=k-n}{=}2-\frac{2}{2n+1}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n}$$

$$2-2\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}=2-\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{i}{n}}$$

On a $f:\begin{array}{ccc}[0,1]&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\frac{2}{1+x}\end{array}$ est continue sur $[0,1]$.

Donc d'après le théorème des sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{2}{1+x}\,dx=2\ln 2.$$

Par suite :

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\ln 2.$$

6)

(6a) Fixons $(x,y) \in [0,+\infty[^2$.

On a :

$$S(y) - S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+y} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+y)-(k+x)}{(k+x)(k+y)}$$

$$\boxed{S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}}$$

(6b)

Fixons $(x,y) \in [0,+\infty[^2$ | $y \geq x$ (i.e $y - x \geq 0$)

Alors d'après (6a) :

$$S(y) - S(x) = \underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}}_{\geq 0} \geq 0$$

D'où $S(y) \geq S(x)$

Bilan : $\boxed{S \text{ est croissante sur } [0,+\infty[}$.

(6c) Fixons $x \in [0,+\infty[$, $h \in \mathbb{R}$, $x+h \in [0,+\infty[$.

On a :

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \overset{(6a)}{=} \frac{(x+h-x)}{h} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+h)} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+h)}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 39 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S Em Lyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Par suite :

$$\left| \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+x} \left(\frac{1}{k+x+h} - \frac{1}{k+x} \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+x} \frac{k+x-(k+x+h)}{(k+x)(k+x+h)} \right|$$

$$\left| \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| = |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \frac{1}{k+x+h}$$

On, x et h étant positifs :

$\forall k \geq 1$, $\begin{cases} \frac{1}{k+x} \leq \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k+x+h} \leq \frac{1}{k} \end{cases}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par somme et convergence, on en déduit :

$$\left| \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par encadrement, on en déduit :

$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$.

Bilan : S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$S' : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

7)

(7a) Fixons $x \in \mathbb{R}_+$.

On a :

$$S(x+1) - S(x) \overset{(6a)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x+1)(k+x)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1+x} - \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k+x+1} \right) \quad \text{(télescopique)}$$

$$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}$$

(7b) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après (7a):

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $S(k+1) - S(k) = \frac{1}{k+1}$.

Par somme et télescopie :

$$S(n) - S(1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or, $S(1) = 1$ (5a) donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

(7c) On a par définition de la partie entière :

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$.

Par croissance de S (6b)

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \; S(\lfloor x \rfloor) \leq S(x) \leq S(\lfloor x \rfloor + 1) \overset{(7a)}{=} S(\lfloor x \rfloor) + \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}$ (*)

* Or, par 2)7b) $S(\lfloor x \rfloor) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln \lfloor x \rfloor$

et : $\forall x \geqslant 1, \; \ln \lfloor x \rfloor = \ln x \, \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \ln x + \ln \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

Or, $\forall x \geqslant 2, \quad x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $1 - \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$

donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ (encadrement)

donc : $\ln \lfloor x \rfloor \sim \ln x$.

En réinjectant dans (*) :

$\forall x \geqslant 2 \quad \underbrace{\frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln x}}_{\sim \to 1} \leq \underbrace{\frac{S(x)}{\ln x}}_{} \leq \underbrace{\frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln x}}_{\sim \to 1} + \underbrace{\frac{1}{(\ln x)(x+1)}}_{\sim \to 0}$

Par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S(n)}{\ln n} = 1$$

Conclusion : $S(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

8)

(8a) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_0^1 \frac{1}{k+x}\, dx\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \left[\ln(k+x)\right]_0^1\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k\right)$$

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx \overset{\text{télescopie}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = u_n.$$

(8b) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\int_0^1 S(x)\,dx - u_n \overset{(8a)}{=} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx.$$

$$\int_0^1 S(x)\,dx - u_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}\, dx \underset{\text{croissance de l'intégrale}}{\geqslant} 0$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 39 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques S Em Lyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On, $\forall k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{k(k+x)} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.

Par somme et convergence :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

d'où par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 S(x)\,dx - u_n \leqslant \int_0^1 x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\,dx$$

($\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$: constante)

linéarité

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 S(x)\,dx - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Conclusion :

$$0 \leqslant \int_0^1 S(x)\,dx - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

(8c) $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Donc : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 0$.

Par encadrement de (8b) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 S(x)\,dx$$

D'où, par (1b) : $\gamma = \int_0^1 S(x)\,dx$.

Partie C -

9) * f est positive
* f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
* On a :

$$\forall B > 1, \int_1^B f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^B = -\frac{1}{B} + 1 \xrightarrow[B \to +\infty]{} 1$$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1.

Bilan : f est une densité de probabilité.

10)

(10a) $X(\Omega) = [1, +\infty[$.

Fixons $x \in [1, +\infty[$.
On a :

$$P(X \leq x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x}.$$

D'où :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

(10b) $x f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge (Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$)

donc X n'admet pas d'espérance.

11)

(11a) Fixons $x \in [0, 1[$.
On a :

$$[Y \leq x] = [X - \lfloor X \rfloor \leq x]$$

$$[Y \leq x] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [k \leq X \leq k + x] \quad \text{car si } k + x < X \leq k+1,\ X - \lfloor X \rfloor > x.$$

Par incompatibilité et σ-additivité de P :

$$P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k + x).$$

d'où $P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+x} \frac{1}{t^2}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = S(x)$

$$\sim \left[-\frac{1}{t}\right]_k^{k+x}$$

Bilan :

$\forall x \in [0,1[,\ P(Y \leq x) = S(x)$.

(11b) $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ prend ses valeurs dans $[0,1[$.
Par croissance de la fonction de répartition, on en déduit d'après (11a) :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(11c) On a la fonction de répartition F_Y de Y (11b) et :

* elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et en 0 (5a) et en 1. (5a et car S est continue car dérivable (6c)).
F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$.

* S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, $]1, +\infty[$ et $]0,1[$ (6c car on admet S' continue).

Conclusion : Y est une variable à densité.

Une densité de Y s'obtient par dérivation (6c) :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

12) Fixons $\beta \in [0,1[$
Posons :

$\begin{cases} u : x \mapsto S(x) \\ v : x \mapsto x \end{cases}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\beta]$ (6c)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018751

et qui vérifient :

$\begin{cases} u' : x \mapsto S'(x) \\ v' : x \mapsto 1 \end{cases}$

Par intégration par parties :

$$\int_0^\beta x S'(x)\,dx = \left[x\,S(x)\right]_0^\beta - \int_0^\beta S(x)\,dx.$$

$$\int_0^\beta x S'(x)\,dx = \beta S(\beta) - \int_0^\beta S(x)\,dx$$

On déduit de (5a) et (8c) que $E(Y)$ existe et en passant à la limite en $\beta \to 1$:

$$E(Y) = 1 - \gamma.$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Problème 2

Partie A

1)

(1a) On a :

$q_n(1) = X - 0 + 0$ car pour $P = 1$, $P' = P'' = 0$.

donc $\boxed{q_n(1) = X}$.

Soient $i \in [\![2, n]\!]$.

$$q_n(X^i) = X^{i+1} - \frac{1}{n^2} i((2n-1)X+1)(X-1)X^{i-1} + \frac{i(i-1)}{n^2} X(X-1)^2 X^{i-2}$$

$$= X^{i+1}\left(1 - \frac{i}{n^2}(2n-1) + \frac{i(i-1)}{n^2}\right) + X^i\left(-\frac{1}{n^2} i X(2-2n) - \frac{2}{n^2} i(i-1)\right)$$

$$+ X^{i-1}\left(\frac{i}{n^2} + \frac{i(i-1)}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2 - i2n + i + i^2 - i\right)X^{i+1} - \frac{1}{n^2}\left(2i - 2in + 2i^2 - 2i\right)X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}$$

$$\boxed{q_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}}$$

(1b)

*Linéarité

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La linéarité de la dérivation assure :

$$(\alpha P+Q)' = \alpha P' + Q' \text{ et } (\alpha P+Q)'' = \alpha P'' + Q''$$

Par suite, il vient, en factorisant :

$$\varphi(\alpha P + Q) = \alpha\, \varphi(P) + \varphi(Q).$$

φ est donc linéaire.

De plus :

$\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg \varphi(X^i) \leq n$ (1a) et $\varphi(X^n) = X^{n-1}$

donc $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(X^i) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Les images des vecteurs d'une base décrivant φ entièrement :

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]).}$$

2)

(2a) On reporte le résultat (1a) pour $n = 2$:

$$\varphi(1) = X$$

$$\varphi(X) = \frac{(2-1)^2}{2^2}X^2 + \frac{2(2-1)}{2^2}X + \frac{1}{4}1 = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}.$$

$$\varphi(X^2) = 0X^3 + 0X^2 + 1X = X$$

Par suite :

$$\boxed{A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.}$$

(2b) On a :

$$*A + \frac{1}{2}I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Pour $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(A + \frac{1}{2}I)X = 0$.

Donc $-\frac{1}{2} \in Sp\,A$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}(A)$

$$* \; A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$ donc $0 \in Sp\,A$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in Ker\,A$.

$$* \; A - I = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

donc $(A - I) \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

donc $1 \in Sp\,A$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \in E_1(A)$.

Conclusion : card $Sp\,A = 3$ donc A est diagonalisable (car $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$) et :

$$Sp\,A = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 1\right\} \; ; \quad E_{-\frac{1}{2}}(A) = Vect \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_0(A) = Vect \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$E_1(A) = Vect \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2c) On déduit de (2b) que $Sp\,C_2 = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 1\right\}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

et posons $\mathcal{F} = \left(1-2X+X^2,\ 1-X^2,\ 1+4X+X^2\right)$.

On a :

$$\text{Vect}\,\mathcal{F} = \text{Vect}\left(1-2X+X^2+1-X^2,\ 1-X^2,\ 1+4X+X^2\right)$$

$$= \text{Vect}\left(1-X,\ 1-X^2+1+4X+X^2,\ 1+4X+X^2\right)$$

$$= \text{Vect}\left(1-X,\ 1+2X,\ 1+4X+X^2\right)$$

$$= \text{Vect}\left(1-X,\ 1+2X+2(1-X),\ 1+4X+X^2\right)$$

$$\text{Vect}\,\mathcal{F} = \text{Vect}\left(1,\ 1-X,\ 1+4X+X^2\right)$$

Cette famille $\left(1,\ 1-X,\ 1+4X+X^2\right)$ est libre car c'est une famille de polynômes non nuls échelonnées en degré donc $\mathcal{F}$ est libre.

Or, card $\mathcal{F} = 3$ donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

D'après (2b) : $\left(1-2X+X^2,\ 1-X^2,\ 1+4X+X^2\right)$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de q_2.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$q_n\left((X-1)^n\right) = X(X-1)^n - \frac{1}{n}\left((2n-1)X+1\right)(X-1)^{n-1} + \frac{n-1}{n}X(X-1)^n$$

$$= (X-1)^n\left(X - \left(\frac{2n-1}{n}X + \frac{1}{n}\right) + \frac{n-1}{n}X\right)$$

$$q_n(X-1)^n = -\frac{1}{n}(X-1)^n$$

$(X-1)^n \neq 0$ donc $(X-1)^n$ est un vecteur propre de q_n associé à $-\frac{1}{n}$.

4)
(4a) Soient $i \in [\![1, n]\!]$.
On a d'après (1a) :

$$q_n(X^i)(1) = \frac{(n-i)^2}{n^2} + \frac{2i(n-i)}{n^2} + \frac{i^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2 - 2in + i^2 + 2in - 2i^2 + i^2\right)$$

$$q_n(X^i)(1) = 1$$

Or, $q_n(1) = X$ donc $q_n(X^0)(1) = 1$.

Par suite, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $q_n(X^i)(1) = 1$.

(4b) Remarquons qu'on peut trouver $(a_{0i}, \dots, a_{ni}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_n(X^i) = \sum_{k=0}^{n} a_{ki} X^i$.

Alors :

$$A_n = (a_{i-1,k-1}) = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ & | & & \\ a_{n0} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

en particulier la somme des coefficients de la colonne i de A_n est :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ki} = \varphi_n(X^i)(1) \overset{(4a)}{=} 1.$$

Ainsi, la somme des coefficients sur chaque colonne de A_n est égale à 1.

(4c) Alors, ${}^tA_n \begin{bmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{somme des coefficients de la première colonne de } A_n \\ | \\ n+1^e \cdots \end{bmatrix}$

donc ${}^tA_n \begin{bmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{bmatrix}$.

Par suite $1 \in Sp\, A_n$.

Or, $rg({}^tA_n - I_{n+1}) = rg({}^t(A_n - I_{n+1})) = rg(A_n - I_{n+1})$

Or, $1 \in Sp\, {}^tA_n$

Donc $rg({}^tA_n - I_{n+1}) \neq n+1$.

$\therefore$

d'où $\operatorname{rg}(A_n - I_{n+2}) < n+1$.

Par conséquent, $1 \in \operatorname{Sp} A_n$.

5)

(5a) Fixons $P \in \mathbb{R}_n[X]$ On a : $((X-1)P)' = P + (X-1)P'$

et $((X-1)P)'' = P' + P' + (X-1)P'' = 2P' + (X-1)P''$

$$\varphi_{n+2}((X-1)P) = X(X-1)P - \frac{1}{(n+2)^2}((2n+1)X+1)(X-1)(P+(X-1)P') + \frac{1}{(n+1)^2}X(X-1)^2(2P'+(X-1)P'')$$

Ainsi :

$$(n+2)^2\varphi_{n+2}((X-1)P) = (n+2)^2X(X-1)P - ((2n+1)X+1)(X-1)(P+(X-1)P') + 2X(X-1)^2P' + X(X-1)^3P''.$$

$$= (X-1)P((n+2)^2X - ((2n+1)X+1)) + (X-1)^2P'(-(2n+1)X - 1 + 2X) + X(X-1)^3P''.$$

$$= (X-1)\left(n^2XP - P - (X-1)^2((2n-1)X+1)(X+1)P' + X(X-1)P''\right)$$

$$(n+2)^2\varphi_{n+2}((X-1)P) = (X-1)(n^2\varphi_n(P) - P)$$

(5b) Fixons P_n un vecteur propre de φ_n associé à d.

D'après (5a) :

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

$(n+1)^2 q_{n+1}((X-1)P) = (X-1)\left(n^2 \alpha P - P\right) = (X-1)P\left(n^2\alpha - 1\right)$

d'où :

$$q_{n+1}\left((X-1)P\right) = (X-1)P\,\frac{n^2\alpha - 1}{(n+1)^2}.$$

$P \neq 0$ (P est un vecteur propre).

Par intégrité de $\mathbb{R}_n[X]$, $(X-1)P \neq 0$.

Donc $(X-1)P$ est un vecteur propre de q_{n-1} associé à $\frac{n^2\alpha - 1}{(n+1)^2}$

6)

(6a) Démontrons par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$\mathcal{H}(n)$: " $Sp(q_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2} \; ; \; j \in [\![0, n]\!] \right\}$ " est vraie

* Initialisation :

$q_1(1) = X$ et $q_1(X) \overset{(1a)}{=} 1$

donc $q_1(1+X) = 1+X$ et $q_1(1-X) = -(1-X)$

donc $Sp\, q_1 = \{-1 ; 1\}$ et $\frac{-1+0}{1^2} = -1$, $\frac{-1+1\times 2}{1^2} = 1$.

$\mathcal{H}(1)$ est donc vraie.

*Hérédité

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie.
Montrons $\mathcal{H}(n+1)$.

On a le spectre de q_n par $\mathcal{H}(n)$ donc, d'après 5 b), on a l'inclusion :

$$\left\{ n^2 X - \frac{-n + j(j+1)}{n^2} - 1 \right\}_{j \in [\![0,n]\!]} \subset Sp\, q_{n+1}.$$

d'où $$\left\{ \frac{-(n+1) + j(j+1)}{(n+1)^2} \; ; \; j \in [\![0,n]\!] \right\} \subset Sp\, q_{n+1}.$$

On a, $\frac{(n+1)(n+2) - (n+1)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} = 1$

et, d'après (4c), $1 \in Sp\, q_{n+1}$

donc :

$$\left\{ \frac{-(n+1) + j(j+1)}{(n+1)^2} \; , \; j \in [\![0, n+1]\!] \right\} \subset Sp\, q_{n+1}.$$

$q_{n+1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n+1}[X])$ et donc $\mathbb{R}_{n+1}[X] = n+2$.

Par suite, card $Sp\, q_{n+1} \leq n+2$.

On en déduit :

$$Sp\, q_{n+1} = \left\{ \frac{-(n+1)+j(j+1)}{(n+1)^2} \; ; \; j \in [\![0, n+1]\!] \right\}$$

d'où $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; Sp\, q_n = \left\{ \frac{-n+j(j+1)}{n^2} \; ; \; j \in [\![0, n]\!] \right\}.$$

(6b) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après (6a), q_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes.
Or $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.
Par suite, q_n est diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

7)
(7a) Par linéarité de q_n :

$$q_n(T_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 q_n(X^i)$$

$$q_n(T_n) \overset{(1a)}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \left(\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1} \right) + X$$

Et on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1}^2 \frac{(n-i+1)^2}{n^2} X^i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{i^2}{n^2} X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1}^2 \frac{(i+1)^2}{n^2} X^i.$$

Donc :

$$\varphi_n(\Pi_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n}{i-1}^2 \frac{(n-i+1)^2}{n^2} + \frac{(i+1)^2}{n^2} \binom{n}{i+1}^2 + \frac{2i(n-i)}{n^2} \binom{n}{i}^2 \right) X^i + X^n$$

et $\binom{n}{i-1} = \frac{n!}{(n-i+1)!(i-1)!} = \binom{n}{i} \times \frac{i}{n-i+1}$

et $\binom{n}{i+1} = \binom{n}{i} \left(\frac{n-i}{i+1} \right)$

d'où en posant

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n}{i-1}^2 \frac{(n-i+1)^2}{n^2} + \frac{(i+1)^2}{n^2} \binom{n}{i+1}^2 + \frac{2i(n-i)}{n^2} \binom{n}{i}^2 \right) X^i = \Sigma :$$

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 \left(\frac{i^2}{n^2} + \frac{(n-i)^2}{n^2} + \frac{2i(n-i)}{n^2} \right) X^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 \left(\frac{i^2 + n^2 - 2in + i^2 + 2in - 2i^2}{n^2} \right) X^i$$

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 X^i \quad \text{or, } \binom{n}{0}^2 = 1 \text{ et } \binom{n}{n}^2 = 1$$

et donc : $\boxed{\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n}$.

(7b) $\Pi_n \neq 0$ et d'après (7a), $\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n$.
Donc Π_n est un vecteur propre associé à 1.

Donc $\mathrm{Vect}\,\Pi_n \subset E_1(\varphi_n)$

Or, $\dim E_1(\varphi_n) = 1$ (6b)

d'où $\boxed{\mathrm{Vect}\,\Pi_n = E_1(\varphi_n)}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

8)

(8a) φ_n est diagonalisable donc $(R_0, \dots, R_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (les R_i sont associés à des valeurs propres distinctes).

Par suite, $\forall (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j R_j$.

On fixe un tel $n+1$-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$.

* Démontrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(k)$:

« $\varphi_n^{(k)}(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (d_j)^k R_j$ ».

* $\mathcal{H}(0)$ est vraie (c'est la définition de (α_i)).

* Fixons $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(k)$ est vraie.

On a $\varphi_n^{(k+1)}(P) = \varphi_n\left(\varphi_n^{(k)}(P)\right)$

$$\overset{\mathcal{H}(k)}{=} \varphi_n\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j (d_j)^k R_j\right)$$

$$\varphi_n^{(k+1)}(P) \overset{\varphi_n \text{ linéaire}}{=} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (d_j)^k \varphi_n(R_j)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par définition des R_j :

$$q_n^{k+1}(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (\lambda_j)^{k+1} R_j .$$

$\mathcal{H}(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion :

$\forall k \in \mathbb{N}$ (donc de $\mathbb{N}^*$), $q_n^{(k)}(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (\lambda_j)^k R_j$.

et donc :

$\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $q_n^k(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (\lambda_j)^k R_j$.

(8b) On a, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, $|\lambda_j| < 1$

en effet, pour $j \neq n$: $-\frac{1}{n} \leq \lambda_j \leq \frac{-n + (n-1)n}{n^2} = 1 - \frac{2}{n} < 1$

Donc $\lim_{k \to +\infty} \lambda_j^k = \begin{cases} 1 \text{ si } j = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Par suite, en passant à la limite en $k \to +\infty$ dans (8a) :

$$\lim_{k \to +\infty} q_n^k(P) = \alpha_n R_n = \alpha_n \Pi_n .$$

Bilan : $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $(q_n^k(P))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha \Pi_n$.

9) On a $Z_1(\Omega) = \{n-1\}$

De fait, on tire une boule rouge (car il n'y a que des rouges dans l'une rouge) et de même avec la bleue.

$$\boxed{\text{Donc } P(Z_1 = n-1) = 1}$$

10) Fixons $i \in [\![0, n]\!]$.
On a si $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$[Z_{k+1} = i] = [Z_k = i-1] \cap [$ je prends une bleue de la rouge et une rouge de la bleue $] \cup [Z_k = i] \cap ([$ je prends une rouge de la rouge et une bleue de la bleue $] \cup [$ je prends une bleue de la rouge et une rouge de la bleue $]) \cup [Z_k = i+1] \cap [$ je prends une rouge de la rouge et une bleue de la bleue.

On renote l'événement :

$$[Z_{k+1} = i] = ([Z_k = i-1] \cap A_i) \cup ([Z_k = i] \cap (B_i \cup C_i)) \cup ([Z_k = i+1] \cap D_i)$$

alors par incompatibilité :

$$P(Z_{k+1} = i) = P_{[Z_k = i-1]}(A_i) P(Z_k = i-1) + (P_{[Z_k = i]}(B_i) + P_{[Z_k = i]}(C_i)) P(Z_k = i) + P_{[Z_k = i+1]}(D_i) P(Z_k = i+1).$$

En utilisant la symétrie des deux urnes :

$$P_{[Z_k = i-1]}(A_i) = \left(\frac{n-(i-1)}{n}\right)^2 \quad ; \quad P_{[Z_k = i]}(B_i) = \frac{i^2}{n^2} \quad ;$$

$$P_{[Z_k = i]}(C_i) = \frac{(n-i)^2}{n^2} \quad ; \quad P_{[Z_k = i+1]}(D_i) = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2.$$

D'où, finalement :

$$P(Z_{k+1}=i) = \left(1-\frac{i-1}{n}\right)^2 P(Z_k=i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)P(Z_k=i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P(Z_k=i+1)$$

*Pour $i=0$:

$$P(Z_{k+1}=0) = P(\overline{Z_k=1} \cap [\text{je tire une rouge de la rouge ou une bleue de la bleue})$$

$$P(Z_{k+1}=0) = \frac{1}{n^2} P(Z_k=1)$$

*Et pour $i=n$:

$$P(Z_{k+1}=n) = P(\overline{Z_k=n-1} \cap [\text{je tire une bleue de la rouge, ou une rouge de la bleue})$$

$$P(Z_{k+1}=n) = \frac{1}{n^2} P(Z_k=n-1)$$

Le résultat reste vrai.

Conclusion :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(Z_{k+1}=i) = \left(1-\frac{i-1}{n}\right)^2 P(Z_k=i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)P(Z_k=i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P(Z_k=i+1)$$

11)

(11a)

Ligne 7 : R=R-1 // on estime la probabilité de tirer une rouge avec rand()/n et bleue avec rand()/n.

Ligne 8 : else if aleaR>(R/n) & aleaB>(R/n) then
R=R+1 // de même probabilité de tirer bleue dans rouge et rouge dans bleue.

Remarque : On peut, comme le fait le programme, ne pas tenir compte des autres cas qui entraînent R=R.

Z=R.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2020-12-PF 018 751

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 39 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques Emlyon BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(11b) function E = esperance (n, k)
N = 10 000
X = zeros (1, N)
for j = 1 : N
X(j) = simule (n, k)
end
E = (1/N) * sum (X)
end function

On simule un grand nombre de fois Z (ici ce grand nombre est 10 000) et on fait la moyenne.
Méthode donc empirique

(11c) On peut conjecturer :

$$E(Z_k) \xrightarrow[k-1+\infty]{} \frac{n}{2}.$$

12)
(12a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$. $\Delta_k(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ (si $Z_k = i$ alors, $Z_{k+1} = i-1$, i ou $i+1$)

(12b) Soient $k \in \mathbb{N}^*$
On a :

$$[\Delta_k = -1] = \bigcup_{i=1}^{n} [Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = i-1]$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par incompatibilité et additivité de P :

$$P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=1}^{n} P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1}=i-1)\, P(Z_k=i)$$

et $P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1}=i-1) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$ car si $Z_k=i$ il faut piocher une rouge dans l'urne rouge ($\frac{i}{n}$ chances) et une bleue dans l'urne bleue ($\frac{i}{n}$ chances par symétrie).

Le terme en 0 étant nul :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k=i)$$

De même,

$$[\Delta_k = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [Z_k=i] \cap [Z_{k+1}=i+1]$$

d'où par additivité de P et incompatibilité :

$$P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=1}^{n} P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1}=i+1)\, P(Z_k=i)$$

et donc en raisonnant comme ci-dessus : si $Z_k=i$, il faut piocher une bleue dans rouge, une rouge dans bleue pour que $Z_{k+1}=i+1$.

Donc :

$$P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(1-\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k=i)$$

(12c) Fixons $k \in \mathbb{N}$.
On a : Δ_k admet une espérance car c'est une variable finie et, d'après (12a) :

$$E(\Delta_k) = -1 \times P(\Delta_k = -1) + 0\, P(\Delta_k = 0) + 1 \times P(\Delta_k = 1)$$

$$\overset{(12b)}{=} \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i) - \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i) - \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n} i\, P(Z_k = i)$$

$$\boxed{E(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n} E(Z_k) \text{ car } Z_k(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Par linéarité de E, on a aussi :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(\Delta_k) = E(Z_{k+1}) - E(Z_k) = 1 - \frac{2}{n} E(Z_k)$$

et donc :

$$\boxed{E(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(Z_k) + 1.}$$

(12d) Posons $\forall k, u_k = Z_k$.

et résolvons :

$$L = \left(1 - \frac{2}{n}\right) L + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{n} L = 1 \Leftrightarrow L = \frac{n}{2}$$

Posons $L = \frac{n}{2}$. On a d'après (12c) :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) u_k + 1 \\ L = \left(1 - \frac{2}{n}\right) L + 1 \end{cases}$$

Par différence ($L_2 \leftarrow L_2 - L_2$) : $\forall k \in \mathbb{N},\ (u_{k+1} - L) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)(u_k - L)$

On reconnaît une suite géométrique d'où :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, (u_k - L) = (u_0 - L)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k$

On en déduit, car $\left|1 - \frac{2}{n}\right| < 1$: $\lim_{k \to +\infty} u_k - L = 0$

d'où $\lim_{k \to +\infty} u_k = \frac{n}{2}$

d'où : $E(Z_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{n}{2}$, ce qui confirme la conjecture (11c)

13)

13a) Fixons $k \in \mathbb{N}^*$.

Par linéarité :

$$\varphi_n(Q_k) = \sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i)\, \varphi_n(X^i)$$

$$\varphi_n(Q_k) \overset{(1a)}{=} \sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i)\left(\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}\right)$$

On a :

$$* \sum_{i=0}^{n} \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i+1)^2}{n^2} X^i$$

$$* \sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n^2} X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} X^i .$$

donc :

$$\varphi_n(Q_k) = P(Z_k = 0) X + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} X^i P(Z_k = i)\left((n-i+1)^2 + (i+1)^2 + 2i(n-i)\right)$$

$$+ P(Z_k = n) X^{n-1} .$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 39 | **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques Em Lyon BS

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

et :

$$\forall i, (n-i+1)^2 + (i+1)^2 + 2i(n-i) = n^2 + 1 + i^2 + 2n - 2in - 2i + i^2 + 2i + 1 + 2in - 2i^2$$
$$= n^2 + 2n + 2.$$

D'où : $$q_n(Q_u) = P(Z_u = 0)X + \left(1 + 2\frac{n+1}{n^2}\right)\sum_{i=0}^{n-2} P(Z_u = i)X^i + P(Z_u = n)X^{n-1}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(13b) Procédons comme dans (8a) :

$$Q_k = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j$$

donc $\forall j$, $\varphi_n^j(Q_k) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_n^j(P_j) \xrightarrow[j \to +\infty]{} \alpha_n P_n$

Donc, par récurrence immédiate :

$$Q_{k+j} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \alpha_n P_n = \alpha_n \Pi_n$$

et par unicité de la limite, pour $\alpha = \alpha_n$:

$$\boxed{Q_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} \alpha \Pi_n}$$

14)

(14a) Fixons $i \in [\![0, n]\!]$.

On utilise la propriété admise au début du Problème 2).

D'après 13b) on obtient :

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} P(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2.}$$

(14b) On a :

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i) = \alpha \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \quad \text{par théorème sur}$$

$= 2^n$

les limites de somme et d'après (14a)

donc $\alpha = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2} = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}}$.

Donc, d'après la formule admise par l'énoncé :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}}$$

(14c) Z_n étant finie on déduit de (14a) et (14b) que Z_n converge en loi vers Z où :

$Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$:

$\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(Z = j) = \alpha \binom{n}{j}^2 = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} \binom{n}{j}^2$.

Z est finie donc Z admet une espérance et :

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{\binom{2n}{n}} \binom{n}{j}^2 = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{j=1}^{n} j \binom{n}{j}^2 = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \Pi_n'(1).$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751