PREPA 2021 - ECS - Scientifique

Mathématiques option scientifique

500751

ETTAHIR

YOUSSEF

22/02/2002

Note de délibération : 19.7 / 20

Numéro d'inscription 500751

Né(e) le 22/02/2002

Signature

Nom ETTAHIR

Prénom (s) YOUSSEF

19.7 / 20

Ecricome Épreuve : Maths Ecricome

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/05

Numéro de table 022

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1

Partie 1

1- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -3A$

Puisque $A^3 = -3A$

donc $A^3 + 3A = 0$

et par conséquent $P(X) = X^3 + 3X$ est annulateur de A

et $sp(A) \subset \{$racines de P dans $\mathbb{R}\}$

càd $sp(A) \subset \{0, -3\}$

On montre que $sp(A) = \{0\}$

On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

est donc 0 est la seule valeur propre car $tr(A) = 0$.

2) On cherche le sous espace propre associé à la valeur propre 0

d'après la formule du rang.

$\dim E_0(A) + rg(A - 0I_3) = 3$.

donc $\dim E_0(A) = 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$. (car $C_3 = -C_2 - C_1$)

donc A n'est pas diagonalisable car la somme de dimensions des sous espaces propres n'égal pas à 3.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.7 / 20

2- Les matrices J et S sont symétriques réelles donc diagonalisables

$$SJ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $$JS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{SJ = JS}$

3- Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre non nul de S et λ la valeur propre associée. donc $SX = \lambda X$.

donc $JS.X = J(\lambda X)$

càd $S.J.X = \lambda.J.X$

donc $JX = \lambda X$.

d'où tout vecteur propre de S est également vecteur propre de J

4- • Puisque $sp(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ et $S \in M_3(\mathbb{R})$ donc la matrice S est diagonalisable. donc il existe une matrice P inversible de $M_3(\mathbb{R})$ et $S = P.D.P^{-1}$ (avec $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale).

càd $P^{-1}S.P = D$ est diagonale

• et puisque tout vecteur propre de S est vecteur propre de J, donc J est diagonalisable et il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}JP$ est diagonale

Partie 2

5- Soit $M=(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $M'=(m'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et λ un réel.

$$\ell_1(M+\lambda M')=\sum_{j=1}^{n}(m_{1,j}+\lambda m'_{1,j})=\sum_{j=1}^{n} m_{1,j}+\lambda\sum_{j=1}^{n} m'_{1,j}$$
$$=\ell_1(M)+\lambda\,\ell_1(M').$$

et puisque l'espace d'arrivé de ℓ_1 est un nombre réel (somme des coefficients de la première ligne)

donc $\boxed{\ell_1 \text{ est une forme linéaire sur } M_n(\mathbb{R})}$

6- Montrons que K_n est un sev de $\mathcal{E}_n$.

- On a par définition $K_n \subset \mathcal{E}_n$.
- et $0_{\mathcal{E}_n} \in K_n$ (la somme des éléments de la matrice nulle est nulle).
- Soit $(A,B)\in(K_n^2)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. càd $s(A)=0$ et $s(B)=0$

  $s(\cancel{A+\lambda B})=$ donc $s(A)+\lambda s(B)=0$.

  donc $(A+\lambda B)\in K_n$.

  d'où K_n est un sev de $\mathcal{E}_n$

7- Soit $M\in\mathcal{E}_n$

On pose $M=(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et ${}^tM=(m'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$

On a $\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, $m'_{i,j}=m_{j,i}$

donc $\ell_i(M)=\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}=\sum_{j=1}^{n} m'_{j,i}=\ell_i({}^tM^*)$

et $C_i(M)=\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}=\sum_{j=1}^{n} m'_{j,i}=\ell\,C_i({}^tM^*)$

et $d_1(M)=d_1({}^tM^*)$

et $d_2(M)=d_2({}^tM^*)$

d'où $\boxed{{}^tM\in\mathcal{E}_n}$

et $\forall M\in\mathcal{E}_n$ $\boxed{s({}^tM)=s(M)}$

8-

9- Soit $M \in \mathcal{E}_n$.

On pose $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$MW_n = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & \ddots & & & m_{2,n} \\ & & \ddots & & \\ m_{n,1} & & & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} m_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1(M) \\ l_2(M) \\ \vdots \\ l_n(M) \end{pmatrix}$$

$$= s(M) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où W_n est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $s(M)$

Partie 3 :

1°) Pour A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $0+1-1 = 0-1+1 = 0+0+0 = 0$.

càd $\forall (i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, $l_i(A) = c_j(A) = d_1(A) = d_2(A)$

et $s(A) = 0$ donc $A \in \mathcal{E}_3$

Numéro d'inscription 500751

Né(e) le 22/02/2002

Nom ETTAHIR ~~YASSER~~

Prénom (s) YOUSSEF

Signature

19.7 / 20

Ecricome Épreuve : Maths Ecricome

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 07

Numéro de table 022

Commencez a composer dès la première page...

Suite exercice 2

3) $\nabla^2 \cancel{f(0,\frac{1}{\sqrt2})} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt2)e^{-\frac12} & 0 \\ 0 & -(\sqrt2+1)e^{-\frac12} \end{pmatrix} = \nabla^2 f(0,\frac{1}{\sqrt2})$

puisque la hessienne de f est diagonale donc $sp(\nabla^2 f(x,y)) = \{(2-\sqrt2)e^{-\frac12}, -(\sqrt2-1)e^{-\frac12}\}$
et come $(2-\sqrt2)e^{-\frac12} \geq 0$ et $-(\sqrt2+1)e^{-\frac12} \leq 0$
donc f n'admet pas d'extrenum local en $(0,\frac{1}{\sqrt2})$

4) $\nabla^2 f(0,-\frac{1}{\sqrt2}) = \begin{pmatrix} (2+\sqrt2)e^{-\frac12} & 0 \\ 0 & (3\sqrt2+2)e^{-\frac12} \end{pmatrix}$

puisque $sp(\nabla^2 f(0,-\frac{1}{\sqrt2})) = \{(2+\sqrt2)e^{-\frac12}, \cancel{3\sqrt2}\,(3\sqrt2+2)e^{-\frac12}\} \subset \mathbb{R}^{+*}$

donc $\boxed{f \text{ admet en } (0,-\frac{1}{\sqrt2}) \text{ un minimum local}}$

5) $H = \begin{pmatrix} 2((1-(\frac12+\frac12))(1-2.\frac12)-2.\frac12)e^{-(\frac12+\frac14)} & -\frac{2}{\sqrt2}(1+0(1-1))e^{-\frac34} \\ -\frac{2}{\sqrt2}(1+2.\frac12(1-\frac12-\frac12))e^{-3/4} & -2(\frac12+2.\frac12+\frac12(1-2.\frac12)(\frac12+\frac12))e^{-\frac34} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2e^{-3/4} & -\sqrt2 e^{-3/4} \\ -\sqrt2 e^{-3/4} & -3e^{-3/4} \end{pmatrix} = \boxed{e^{-3/4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt2 \\ -\sqrt2 & -3 \end{pmatrix}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.7 / 20

-> Puisque H est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ et $sp(H) = \{-2e^{-3/4}, -3e^{-3/4}\}$
et toutes les valeurs propres sont strictement négatives
donc $\boxed{f \text{ presente en } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) \text{ un maximum local}}$

6) a- On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ~~$0 \leq |(x^2+y)e^{-(x^2+y^2)}| \leq (x^2+y)$~~
$0 \leq |f(x,y)| \leq (x^2+y)e^{-x^2}$ (car $e^{-x^2+y^2} \leq e^{-x^2}$)
en posant $x = \max(|x|,|y|)$. et $y = \max(|x|,|y|)$
on obtient $0 \leq |f(x,y)| \leq (\max(|x|,|y|)^2 + \max(|x|,|y|)) e^{-(\max(|x|,|y|))^2}$
~~7~~b-

8) On y est continue dérivable sur $[-1,1]$
$\forall y \in [-1,1], g'(y) = 1 - 2y$.

	-1		$1/2$		1
g'		$+$	0	$-$	
g	-1	↗	$5/4$	↘	1

dc g possède deux extremums
en -1 c'est un min global
et en $1/2$ " " max global.

Problème

Partie 1

1) a-
```
function V= sim_V(n,a)
  V= max(grand(1,1,'unf',0,a))
endfunction
```

b- On peut conjecturer que l'estimateur V_n converge vers $a=1$.

2) (a) $F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{a} & \text{si } x\in[0,a] \\ 1 & \text{si } x>a \end{cases}$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(V_n \le x) \\ &= P(\max(X_1,\dots,X_n) \le x) \\ &= P((X_1\le x),(X_2\le x),\dots,(X_n\le x)) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= (P(X_1\le x))^n \\ &= (F_1(x))^n \end{aligned}$$

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n & \text{si } x\in[0,a] \\ 1 & \text{si } x>a. \end{cases}}$$

c) - On a F_n est de C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et en a et F_n est continue sur $\mathbb{R}$ ($\lim_{x\to a} F_n(x) = F_n(a) = 1$ et $\lim_{x\to 0} F_n(x) = F_n(0) = 0$)
et $\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = 1$

De plus $\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = 0$

Enfin V_n est une variable aléatoire à densité

Numéro d'inscription 500751

Né(e) le 22/02/2002

Nom ETTAHIR

Prénom (s) YOUSSEF

19.7 / 20

Ecricome Épreuve : Maths Ecricome

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/07

Numéro de table 022

Suite partie 3

10) pour J :

On a $\forall (i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, $l_i(J) = c_j(J) = d_1(J) = d_2(J)$

et $s(J) = 3$. d'où $J \in \mathcal{E}_3$

pour S.

On a $1 - 1 + 0 = \cancel{-1} 0 + 1 = 1 - 1 = 0 = 1 + 0 - 1$

càd $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $l_i(S) = c_j(S) = d_1(S) = d_2(S)$ donc $S \in \mathcal{E}_3$

et $s(S) = 0$

11) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. et $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$

On a $\begin{cases} M = M_1 + M_2 \\ {}^tM = {}^tM_1 + {}^tM_2 \end{cases}$

càd $\begin{cases} M = M_1 + M_2 \\ {}^tM = -M_1 + M_2 \end{cases}$

càd $\begin{cases} M = M_1 + M_2 \\ M_2 = \dfrac{M + {}^tM}{2} \end{cases}$

de même $\begin{cases} M = M_1 + M_2 \\ M_1 = \dfrac{M - {}^tM}{2} \end{cases}$

donc $M = M_1 + M_2$ avec M_1 antisymétrique et M_2 symétrique

et $M_1 = \dfrac{M - {}^tM}{2}$ et $M_2 = \dfrac{M + {}^tM}{2}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.7 / 20

12) Soit $M \in K_3$ càd. $s(M) = 0$

On a d'après 11)

$M_2 = \frac{M + {}^tM}{2}$

et puisque. $s({}^tM) = s(M)$, Q7.)

donc $s(M_2) = \frac{0+0}{2} = 0$.

d'où $\boxed{M_2 \in K_3}$

et $M_1 = \frac{M - {}^tM}{2}$

et puisque $s(M) = s({}^tM) = 0$.

donc $s(M_1) = \frac{0-0}{2} = 0$

d'où $\boxed{M_1 \in K_3}$

b) Puisque M_1 est antisymétrique et A est antisymétrique

et comme M_2 est symétrique et S est symétrique

donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / M_1 = \alpha A$ et $M_2 = \beta S$

3) Soit $M \in K_3$.

On a $M = M_1 + M_2$

$= \alpha A + \beta S$

$= \mathrm{Vect}(A, S)$.

On montre que (A, S) est base de K_3

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 / aA + bS = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

càd $\begin{pmatrix} b & a-b & -a \\ -a-b & 0 & a+b \\ a & -a+b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

càd $a = b = 0$

et comme (A, S) est génératrice de K_3

donc $\boxed{(A, S) \text{ est base de } K_3}$

- Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ telles que $\alpha A+\beta J+\gamma S=0_{M_3(\mathbb{R})}$

c.à.d $\begin{pmatrix} \beta+\gamma & \beta+\alpha-\gamma & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta-\gamma & \beta & \beta+\alpha+\gamma \\ \alpha+\beta & -\alpha+\beta+\gamma & \beta-\gamma \end{pmatrix}=0_{M_3(\mathbb{R})}$

c.à.d $\beta=0$ et $\gamma=0$ et $\alpha=0$

donc (A,J,S) est libre

et puisque $\mathrm{card}(A,J,S)=3=\dim \mathcal{E}_3$

donc (A,J,S) est base de $\mathcal{E}_3$

14-

Exercice 2

1- On a $(x,y)\longrightarrow x^2+y$ est de C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale

et $(x,y)\longrightarrow -(x^2+y^2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale

et puisque la fonction exponentielle est de C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

donc $(x,y)\longmapsto (x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

par opérations algébriques et composition

Enfin $\boxed{f \text{ est de } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

$\rightarrow$ $\partial_1 f(x,y)=(x^2+y)'\,e^{-(x^2+y^2)}+(x^2+y)\cdot\left[-(x^2+y^2)\right]'e^{-(x^2+y^2)}$

$=2x\,e^{-(x^2+y^2)}+(x^2+y)x-2x.\,e^{-(x^2+y^2)}$

d'où $\boxed{\partial_1 f(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y)}$

et $\partial_2 f(x,y) = (x^2+y)' e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y)\left(e^{-(x^2+y^2)}\right)'$

$= e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y) - 2y \cdot e^{-(x^2+y^2)}$

d'où $\boxed{\partial_1 f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(1-2y(x^2+y))}$

2) $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y) = 0 \\ e^{-(x^2+y^2)}(1-2y(x^2+y)) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-x^2-y) = 0 \\ 1-2y(x^2+y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2x^3-2xy = 0 \\ 1-2yx^2-2y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } 2-2x-2y = 0 \\ 1-2yx^2-2y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } 1-2yx^2-2y^2 = 0 \\ 1-x-y = 0 \text{ et } 1-2yx^2-2y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y^2 = \frac{1}{2} \\ y = x^2 \text{ et } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{1}{2} \text{ et } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ donc les pts critiques sont $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$

3) $H' = \nabla^2 f(x,y)$

$= \cancel{\begin{pmatrix} 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}}$

$= \begin{pmatrix} 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2\left[\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

Numéro d'inscription S 0 0 7 5 1

Né(e) le 22 / 02 / 2002

Nom ETTAHIR

Prénom (s) YOUSSEF

Signature

19.7 / 20

Écricome Épreuve : Maths Ecricome

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 05

Numéro de table 022

Commencez à composer dès la première page

Suite Problème :

2) c) Comme F_n est de C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et en a.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = F_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]0,a[\\ \frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} & \text{si } x \in]0,a[\end{cases}$

3). si $E(V_n)$ existe

$$E(V_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^a x f_n(x)\,dx + \int_a^{+\infty} 0\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{n}{a} \cdot x \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} dx$$

$$= \int_0^a n \left(\frac{x}{a}\right)^n dx$$

$$= \frac{n}{a^n} \int_0^a x^n\,dx$$

$$= \frac{n}{a^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a$$

$$= \frac{n}{a^n} \cdot \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$E(V_n) = \frac{na}{n+1}$$

d'où $\boxed{E(V_n) \text{ existe et vaut } \frac{n}{n+1} a}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.7 / 20

• $\cancel{\lim_{n \to +\infty} E(V_n) = \lim_{n \to +\infty}}$

On a $b_a(V_n) = E(V_n) - a$

$= \frac{n}{n+1} a - a$

$= a\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) \neq 0.$

donc V_n est biaisé

4) Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On a $(|V_n - a| \geq \varepsilon) = (V_n - a \geq \varepsilon) \cup (V_n - a \leq -\varepsilon)$

donc

$P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = P(V_n - a \geq \varepsilon) + P(V_n - a \leq -\varepsilon)$ (somme disjointe)

$= P(V_n \geq \varepsilon + a) + P(V_n \leq a - \varepsilon)$

$= F_n(a - \varepsilon)$ (car $P(V_n \geq \varepsilon + a) = 0$)

• $\lim_{n \to +\infty} P(|V_n - a| \geq \varepsilon) = \lim_{n \to +\infty} F_n(a - \varepsilon)$

$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a - \varepsilon}{a}\right)^n$

$= 0.$

donc $P(|V_n - a| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ce qui signifie que V_n est convergent

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$

$P(n(a - V_n) \leq t) = P\left(a - V_n \leq \frac{t}{n}\right)$

$= P\left(-V_n \leq \frac{t}{n} - a\right)$

$= P\left(V_n \geq a - \frac{t}{n}\right)$

$= 1 - F_n\left(a - \frac{t}{n}\right)$ F

. donc $\lim_{n \to +\infty} P(n(a - V_n) \leq t) = \lim_{n \to +\infty} 1 - F_n(a - \frac{t}{n}) = 0$

donc $(n(a - V_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0

7) si $E(V_n^2)$ existe.

$$E(V_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^a x^2 \cdot \frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} dx + \int_a^{+\infty} 0\,dx$$
$$= \frac{n}{a^n} \int_0^a x^{n+1}\,dx = \frac{n}{a^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^a$$
$$= \frac{n}{a^n} \cdot \frac{a^{n+2}}{n+2}$$

d'où $\boxed{E(V_n^2) \text{ existe et vaut } \frac{na^2}{n+2}}$

b) $R_a(V_n) = (b_a(V_n))^2 + Var(V_n)$

$$= \left(\frac{n}{n+1}a - a\right)^2 + \frac{na^2}{n+2} - \frac{n^2a^2}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{n^2a^2}{(n+1)^2} - \frac{2na^2}{n+1} + a^2 + \frac{na^2}{n+2} - \frac{n^2a^2}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{-2na^2(n+2) + a^2(3n+n^2+2) + na^2(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{-2n^2a^2 - 4na^2 + n^2a^2 + 3na^2 + 2a^2 + n^2a^2 + na^2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$$

quand $n \to +\infty$ $R_a(V_n) \longrightarrow 0$

ce qui signifie que V_n converge en m vers a, il permet de retrouver le résultat de la question 4)

Partie 2

8 — function y = sim_M(n, a)

y=2*(sum (grand(1,1,'unf', 0, a)) / n.

end function

9) $E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$

donc $\boxed{E(\overline{X}_n) = \frac{a}{2}}$

et $V(\overline{X}_n) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ (indépendance)

$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{a^2}{12}$

$\boxed{V(\overline{X}_n) = \frac{a^2}{12n}}$

- Comme $E(\overline{X}_n) = \frac{a}{2}$.

donc $E(M_n) = E(2\overline{X}_n)$

$= 2E(\overline{X}_n)$

$E(M_n) = a$.

donc M_n est un estimateur sans biais

10) $r_a(M_n) = (b_a(M_n))^2 + Var(M_n)$

$= 0 + Var(2 . \overline{X}_n)$

$= 4 \, Var(\overline{X}_n)$

$= 4 \cdot \frac{a^2}{12n}$

donc $\boxed{r_a(M_n) = \frac{a^2}{3n}}$

quand $n \mapsto +\infty$ $r_a(M_n) \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{} 0$

donc cet estimateur est aussi convergent

Numéro d'inscription 500751

Né(e) le 22/02/2002

Nom ETTAHIR

Prénom (s) YOUSSEF

19.7 / 20

Ecricome Épreuve : Maths Ecricome

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/05

Numéro de table 022

Commencez à composer dès la première page.

11) On a $\sqrt{n}(M_n - a) = \dfrac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}}$

d'après le théorème de la limite centrale la suite $(\sqrt{n}(M_n - a))_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

13) On a $r_a(M_n) - r_a(V_n) = \dfrac{a^2}{3n} - \dfrac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{a^2(n+1)(n+2) - 2a^2\, 3n}{3n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{a^2(n^2+2n+n+2) - 6na^2}{3n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{a^2n^2 + 3na^2 - 6na^2 + 2a^2}{3n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{a^2n^2 - 6na^2 + 2a^2}{3n(n+1)(n+2)} > 0.$$

dc $r_a(M_n) > r_a(V_n)$ donc V_n converge plus vite à a que M_n.

<u>Partie 3</u>

14) a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]a, 2a]$.

$P(V_n \leq t) = \cancel{P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t)}$.

$= P(V_1 \leq t)$

$= P(X_1 \leq t)$

$= \dfrac{t}{2a}$ (car si $t \in]a, 2a]$ $F_{X_1}(t) = \dfrac{t-0}{2a-0} = \dfrac{t}{2}$)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.7 / 20

c) $P(V_n > \frac{3}{2}a) = 1 - P(V_n \leq \frac{3}{2}a) = 1 - \frac{3}{2a} \cdot \frac{1}{2a} = 1 - \frac{3}{4a}$

15)

(a) On a $X_2 + \dots + X_n = \frac{(n-1)M_n'}{2}$

donc $X_1 + \dots + X_n = \frac{(n-1)M_n'}{2} + X_1$.

Enfin $\boxed{M_n = 2\overline{X}_n = \frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{2}M_n' + X_1\right)}$