Proposition de corrigé des

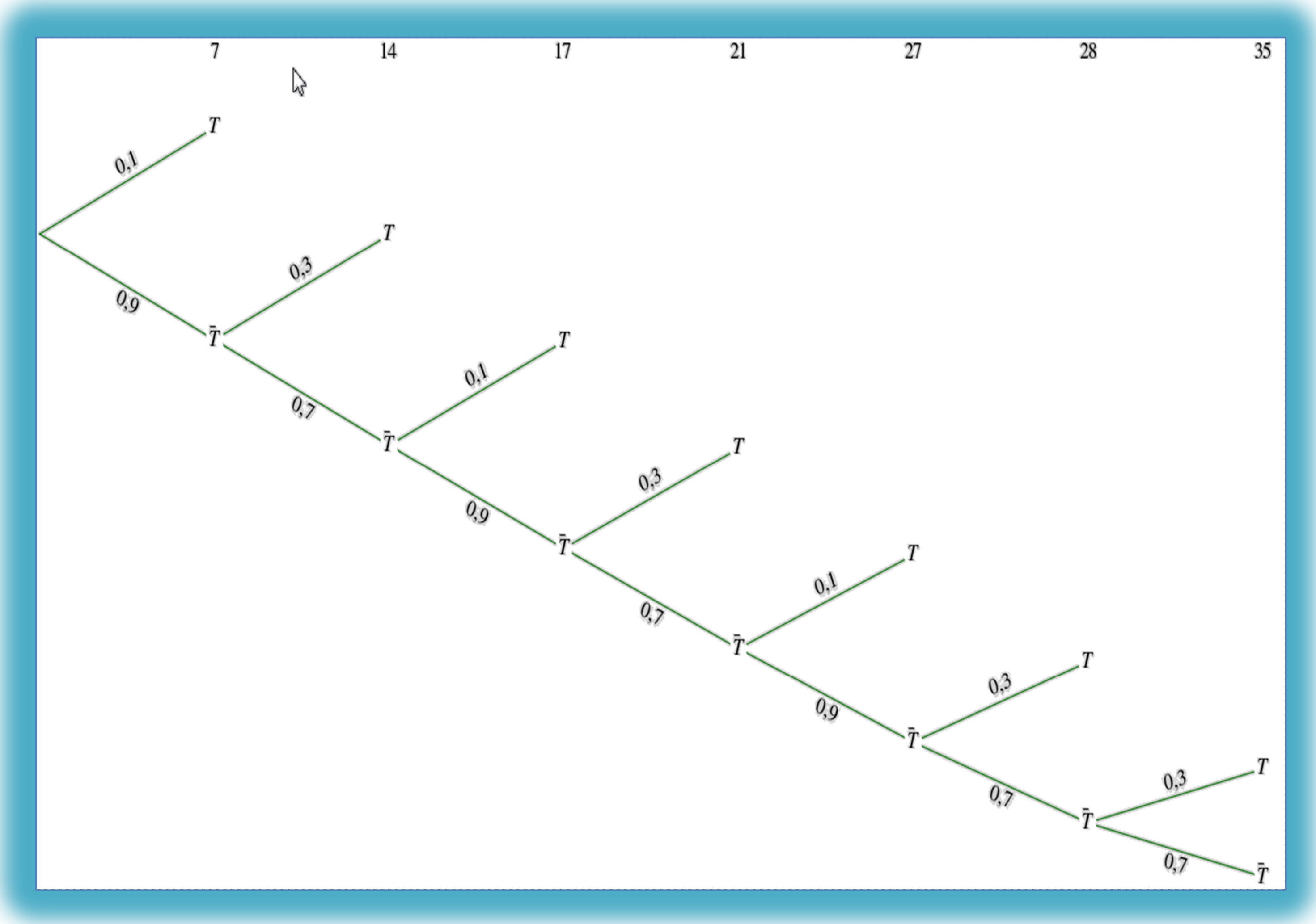
Olympiades nationales de mathématiques 2019 Orient

EXERCICES ACADÉMIQUES

Exercice 1 : Le jeu du pinto.

1. 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; pinto ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; pinto ; 15 ; 16 ; pinto ; 18 ; 19 ; 20 ; pinto ; 22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; pinto ; pinto ; 29 ; 30 ; 31 ; 32 ; 33 ; 34 ; pinto ; 36 ; pinto ; 38 ; 39 ; 40 ; 41 ; 42 !!!.

2. a) Soit T l'événement : “Hugo se trompe sur un nombre pinto“.
   Soit X la variable aléatoire qui indique le rang du pinto où Hugo se trompe pour la première fois.
   X suit donc une loi géométrique tronquée (ou plutôt une variante).
   Les valeurs possibles x_i de X sont : 1,2,3,4,5,6,7,8,……

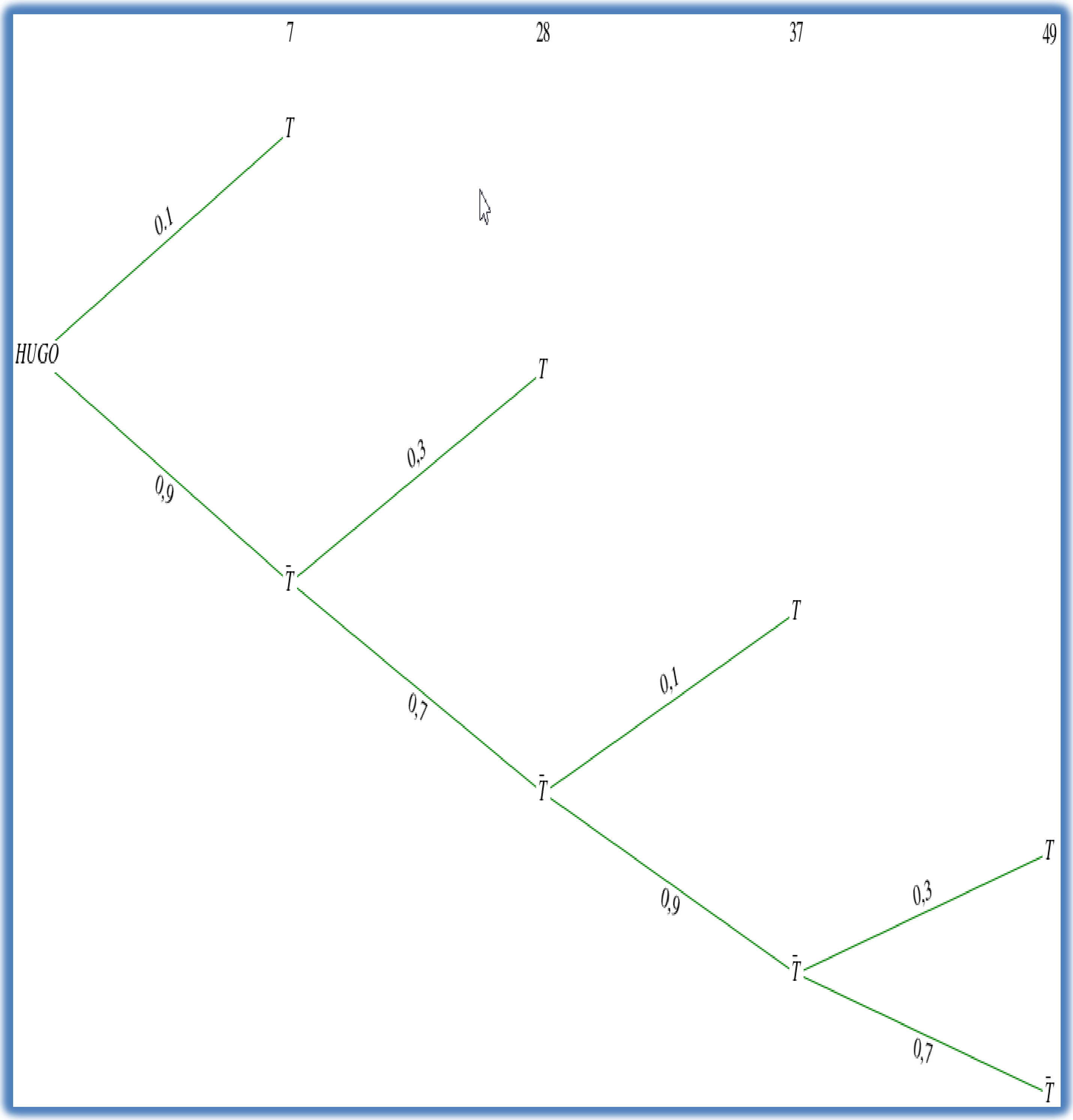


Pinto	7	14	17	21	27	28	35
x_i	1	2	3	4	5	6	7
P(X=x_i)	0.1	0.9×0.3=0.27	0.9×0.7×0.1=0.063	0.1701	0.03969	0.107163	0.0750141
P(X≤ x_i)	0.1	0.37	0.433	0.6031	0.64279	0.749953	**0.8249671**

Donc, à partir de 7 nombres pintos la probabilité qu'il se trompe est supérieure à 0.75.

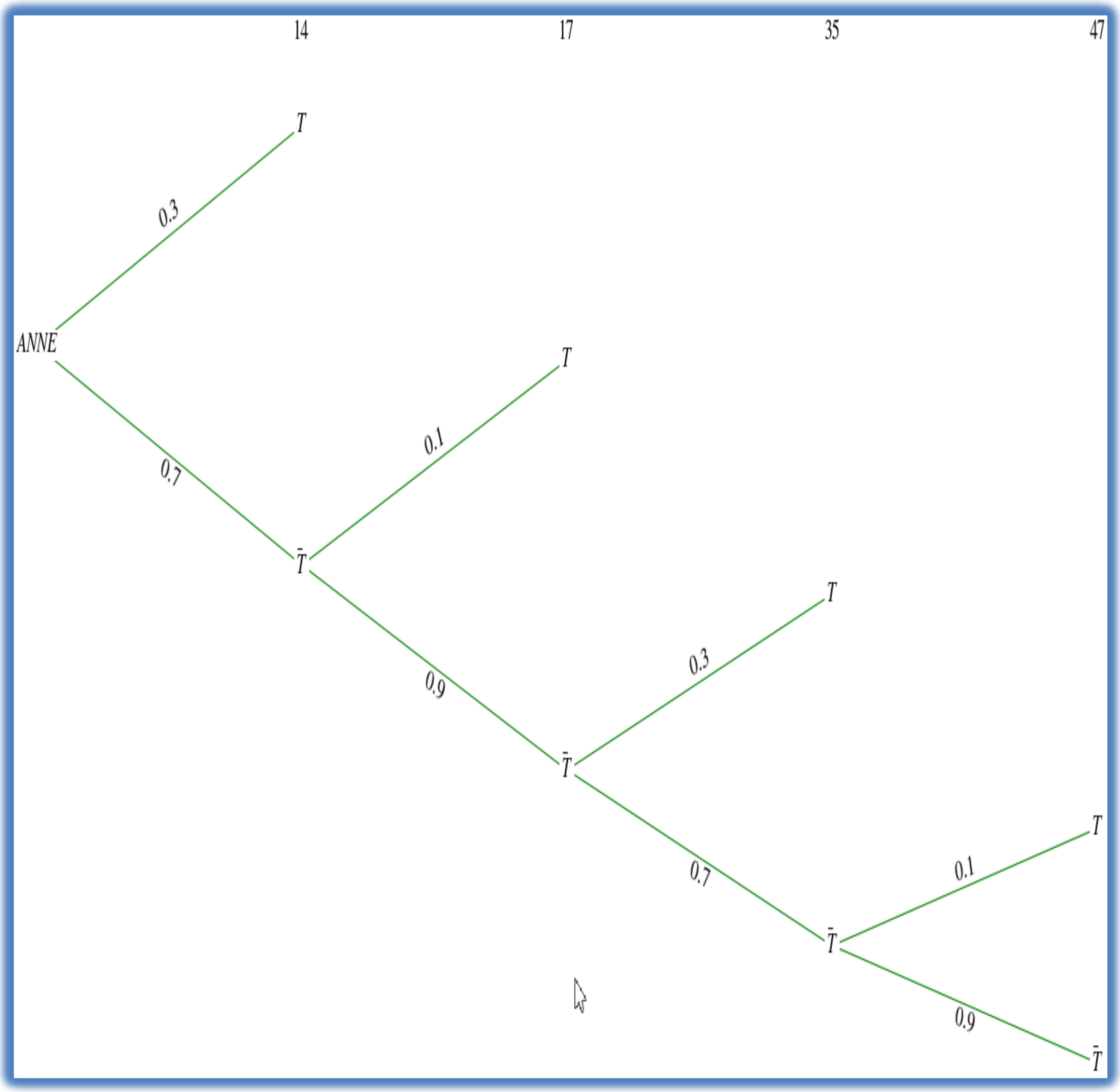
b)

Hugo	Anne	Arthur
1	2	3
4	5	6
pinto	8	9
10	11	12
13	pinto	15
16	pinto	18
19	20	pinto
22	23	24
25	26	pinto
pinto	29	30
31	32	33
34	pinto	36
pinto	38	39
40	41	pinto
43	44	45
46	pinto	48
pinto	50	



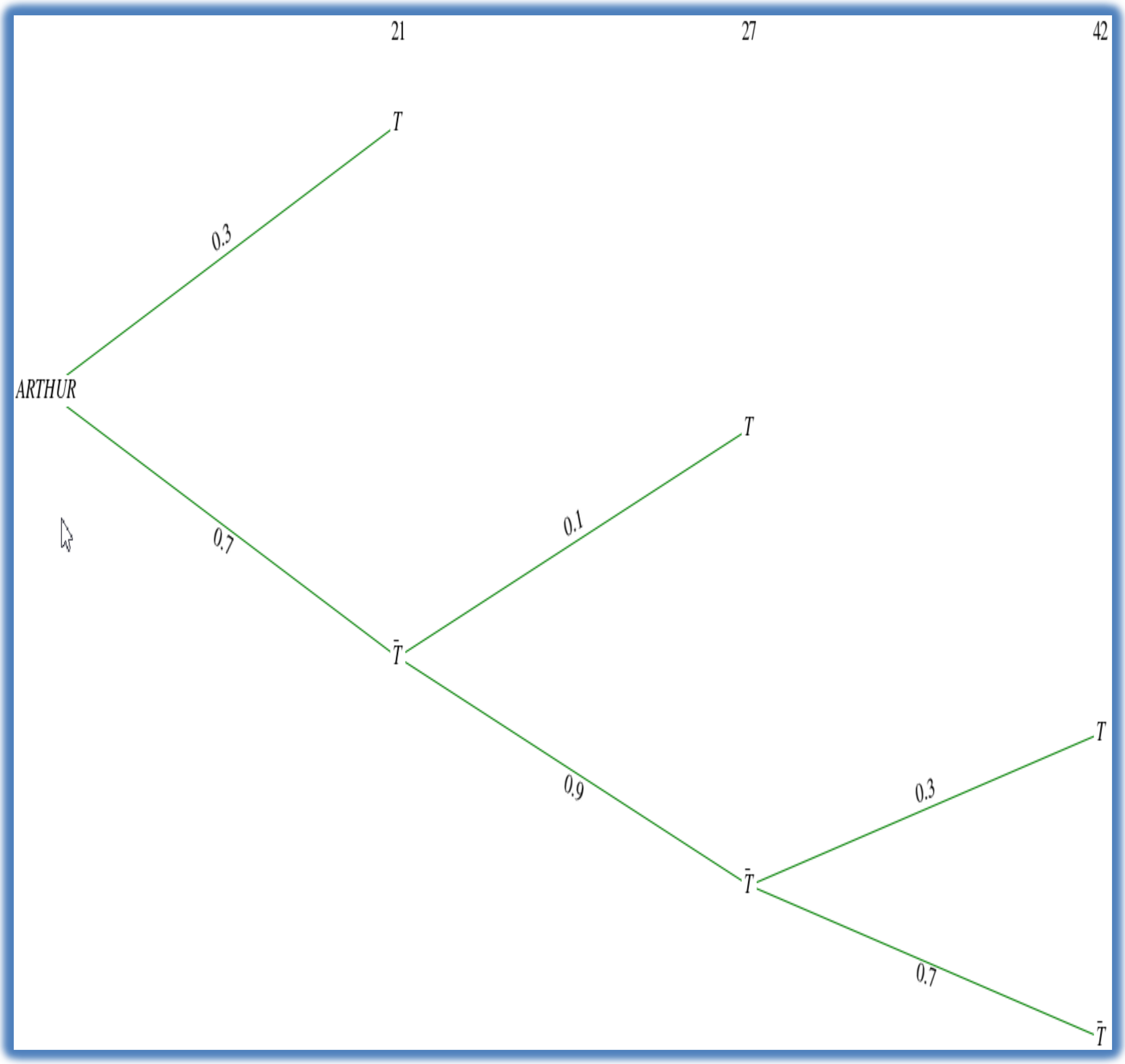
HUGO :

Pinto	7	28	37	49
x_i	1	2	3	4
P(X=x_i)	0.1	0.9×0.3=0.27	0.9×0.7×0.1=0.063	0.1701
P(X≤ x_i)	0.1	0.37	0.433	**0.6031**



ANNE :

Pinto	14	17	35	47
x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0.3	0.7×0.1=0.07	0.7×0.9×0.3=0.189	0.0441
$P(X\leq x_i)$	0.3	0.37	0.559	**0.6031**



ARTHUR :

Pinto	21	27	42
x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	0.3	$0.7\times0.1=0.07$	$0.7\times0.9\times0.3=0.189$
$P(X\leq x_i)$	0.3	0.37	**0.559**

D'où, Arthur est le plus avantagé.

3. fonction TestPinto(n)

   $Résultat \leftarrow Faux$

   Si Reste(n,10)=7

   $\quad Résultat \leftarrow Vrai$

   Fin Si

   Si Reste(n,7)=0

   $\quad Résultat \leftarrow Vrai$

   Fin Si

4. u_n étant pinto et $u_{n+1} > u_n$, on peut alors distinguer les 3 cas suivants :

   <u>1er cas : u_n se termine par 0,1,2,3,4,5 ou 6</u> cad $\boxed{s_n < 7}$:

   Dans ce cas, u_n est forcément un pinto multiple de 7 dont le chiffre des unités est 0,1,2,3,4,5 ou 6.

   Or,

Chiffre des unités de u_n	0	1	2	3	4	5	6
s_n	0	1	2	3	4	5	6
$7-s_n$	7	6	5	4	3	2	1
Chiffre des unités de u_n+7-s_n	7	7	7	7	7	7	7

   Et puisque $u_n + 7 - s_n < u_n + 7$, alors $u_n + 7 - s_n$ est le pinto qui suit u_n étant compris entre les 2 multiples de 7 qui sont : u_n et $u_n + 7$.

   D'où, dans ce cas $\boxed{u_{n+1} = u_n + 7 - s_n}$.

   <u>2ème cas : u_n se termine par 7</u> cad $\boxed{s_n = 7}$:

   ici on distingue deux cas :

   - <u>u_n est multiple de 7 :</u>

     Dans ce cas, $7 - s_n = 0$ et $7 - r_n = 7 - 0 = 7$, alors $u_n + 7 - r_n$ est aussi multiple de 7 et c'est le pinto qui suit u_n.

   - <u>u_n n'est pas multiple de 7 :</u>

     Dans ce ca, $7 - s_n = 0$ et $u_n = 7k + r_n$ où $0 < r_n \leq 6 \Rightarrow u_n - r_n = 7k$ multiple de 7 $\Rightarrow$ $u_n + 7 - r_n$ est aussi multiple de 7 et c'est le pinto qui suit u_n.

   D'où, dans ce cas $\boxed{u_{n+1} = u_n + 7 - r_n}$.

   <u>3ème cas : u_n se termine par 8 ou 9</u> cad $\boxed{s_n > 7}$:

   Dans ce cas, $7 - s_n < 0$ et alors u_{n+1} ne peut pas être égal à $u_n + 7 - s_n$.

   En plus, dans ce cas u_n est forcément un multiple de 7, donc $r_n = 0$ et alors $u_n + 7 - r_n$ est le pinto qui suit u_n. D'où, dans ce cas $\boxed{u_{n+1} = u_n + 7 - r_n}$.

Par suite, la fonction suivante permet de déterminer la valeur de u_n :

fonction CalcPinto(n)

$u \leftarrow 0, a \leftarrow 0, b \leftarrow 0$

Pour i de 1 à n

  Si a < 7

    $u \leftarrow u + 7 - a$

  Sinon

    $u \leftarrow u + 7 - b$

  Fin Si

  $a \leftarrow reste(u; 10), b \leftarrow reste(u; 7)$

Fin Pour

Voici quelques exemples à l'appui :

n	u(n)	7-r(n)	7-s(n)	b=r(n)	a=s(n)
1	**7**	7	0	0	7
2	**14**	7	3	0	4
3	**17**	4	0	3	7
4	**21**	7	6	0	1
5	**27**	1	0	6	7
6	**28**	7	-1	0	8
7	**35**	7	2	0	5
8	**37**	5	0	2	7
9	**42**	7	5	0	2
10	**47**	2	0	5	7
11	**49**	7	-2	0	9
12	**56**	7	1	0	6
13	**57**	6	0	1	7
14	**63**	7	4	0	3
15	**67**	3	0	4	7
16	**70**	7	7	0	0
17	77	7	0	0	7
18	84	7	3	0	4
19	87	4	0	3	7
20	91	7	6	0	1
21	97	1	0	6	7
22	98	7	-1	0	8
23	105	7	2	0	5
24	107	5	0	2	7
25	112	7	5	0	2
26	117	2	0	5	7
27	119	7	-2	0	9
28	126	7	1	0	6
29	127	6	0	1	7

(les multiples de 7 étant en bleu et les non multiples de 7 en jaune).

b est toujours plus petit ou égal à a car :

- Si u_n est multiple de 7 alors b=0 et a≥0
- Si u_n n'est pas multiple de 7 alors a=7 et b≤6

5.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}
7	7	3	4	6	1	7	2	5	5	2	7	1	6	4	3	7	7

qui forment vraiment un palindrome.

6. a. <u>1er cas :</u> ℓ est multiple de 7 $\Leftrightarrow$ 70k + ℓ est multiple de 7 (70k étant multiple de 7)

$\Leftrightarrow$ 70k + ℓ est pinto (et multiple de 7).

<u>2ème cas :</u> ℓ se termine par 7 $\Leftrightarrow$ 70k + ℓ se termine par 7 (car 70k se termine par 0)

$\Leftrightarrow$ 70k + ℓ est pinto (et se termine par 7).

70 étant le premier pinto $\geq$ 70 et vérifiant 70 = 70 $\times$ 1 + 0 , alors c'est le plus petit entier naturel vérifiant la propriété.

b.

n	u(n)	Q(n,16)	R(n,16)	u[R(n,16)]	n	u(n)	Q(n,16)	R(n,16)	u[R(n,16)]	n	u(n)	Q(n,16)	R(n,16)	u[R(n,16)]	n	u(n)	Q(n,16)	R(n,16)	u[R(n,16)]
1	7	0	1	7	17	77	1	1	7	33	147	2	1	7	1121	4907	70	1	7
2	14	0	2	14	18	84	1	2	14	34	154	2	2	14	1122	4914	70	2	14
3	17	0	3	17	19	87	1	3	17	35	157	2	3	17	1123	4917	70	3	17
4	21	0	4	21	20	91	1	4	21	36	161	2	4	21	1124	4921	70	4	21
5	27	0	5	27	21	97	1	5	27	37	167	2	5	27	1125	4927	70	5	27
6	28	0	6	28	22	98	1	6	28	38	168	2	6	28	1126	4928	70	6	28
7	35	0	7	35	23	105	1	7	35	39	175	2	7	35	1127	4935	70	7	35
8	37	0	8	37	24	107	1	8	37	40	177	2	8	37	1128	4937	70	8	37
9	42	0	9	42	25	112	1	9	42	41	182	2	9	42	1129	4942	70	9	42
10	47	0	10	47	26	117	1	10	47	42	187	2	10	47	1130	4947	70	10	47
11	49	0	11	49	27	119	1	11	49	43	189	2	11	49	1131	4949	70	11	49
12	56	0	12	56	28	126	1	12	56	44	196	2	12	56	1132	4956	70	12	56
13	57	0	13	57	29	127	1	13	57	45	197	2	13	57	1133	4957	70	13	57
14	63	0	14	63	30	133	1	14	63	46	203	2	14	63	1134	4963	70	14	63
15	67	0	15	67	31	137	1	15	67	47	207	2	15	67	1135	4967	70	15	67
16	70	1	0	0	32	140	2	0	0	48	210	3	0	0	1136	4970	71	0	0

Il semble que u_n = [(quotient(u_{R_n},10) + 7 $\times$ quotient(n,16)] $\times$ 10 + reste(u_{R_n},10).

c. R_{9231} = reste(9231,16) = 15 $\Rightarrow$ $u_{R_{9231}}$ = u_{15} = 67.

D'où, u_{9231} = [(quotient($u_{R_{9231}}$,10) + 7 $\times$ quotient(9231,16)] $\times$ 10 + reste($u_{R_{9231}}$,10)

= [(quotient(67,10) + 7 $\times$ quotient(9231,16)] $\times$ 10 + reste(67,10)

= [6 + 7 $\times$ 576] $\times$ 10 + 7

= 40 387.

Exercice 2 : Les Caméléons RGB.

Partie A : étude des configurations

1. (55;0;0) , (0;55;0) et (0;0;55) signifient que tous les caméléons sont de même couleur, donc même s'ils se rencontrent leur couleur ne va pas changer. D'où, ces triplets sont stables.

2. (23 ;15 ;17) $\xrightarrow{en\ croisant\ 2\ rouges\ et\ 2\ verts\ qui\ donnent\ lieu\ \text{à}\ 4\ bleus}$
   (21 ;13 ;21)$\xrightarrow{en\ croisant\ 21\ rouges\ et\ 21\ bleus\ qui\ donnent\ lieu\ \text{à}\ 42\ verts}$(0 ;55 ;0).

3. Si 2 couleurs sont de même effectif alors ils peuvent se rencontrer 2 à 2 et changer en l'autre couleur. Ceci implique que tous les caméléons pourront être de même couleur.

4. <u>Si la différence de 2 effectifs est multiple de 3 :</u>
   alors le triplet est par exemple de la forme
   (b+3k ;v ;b)$\xrightarrow{en\ croisant\ k\ rouges\ et\ k\ verts}$(b+2k ;v-k ;b+2k) avec v>k.
   <u>Réciproquement, si 2 effectifs sont égaux :</u>
   alors le triplet est par exemple de la forme (b ;v ;b) =
   (x+2k ;v ;x+2k)$\xrightarrow{en\ croisant\ k\ verts\ et\ k\ bleus}$($x$+4k ;v-k,$x$+k) avec v>k
   $\xrightarrow{en\ croisant\ k\ rouges\ et\ k\ bleus}$($x$+3k ;v+k ;$x$)

5. Rouge : non car 17-15=2 qui n'est pas multiple de 3
   Bleu : non car 23-15=8 qui n'est pas multiple de 3.

6. Pour c de 0 à 55

```
    Pour t de 0 à 54 pas de 3
    Si 55-2c-t ≥ 0
      Alors Afficher (c ;c+t ;55-2c-t)
            Si c ≠ c+t
              Alors Afficher (c+t ;c ;55-2c-t)
            FinSi

            Afficher (c ;55-2c-t ;c+t)
            Si c ≠ c+t
              Alors Afficher (c+t ;55-2c-t ;c)
            FinSi

            Afficher (55-2c-t ;c ;c+t)
            Si c ≠ c+t
              Alors Afficher (55-2c-t ;c+t ;c)
            FinSi
    FinSi
    FinPour
FinPour
```

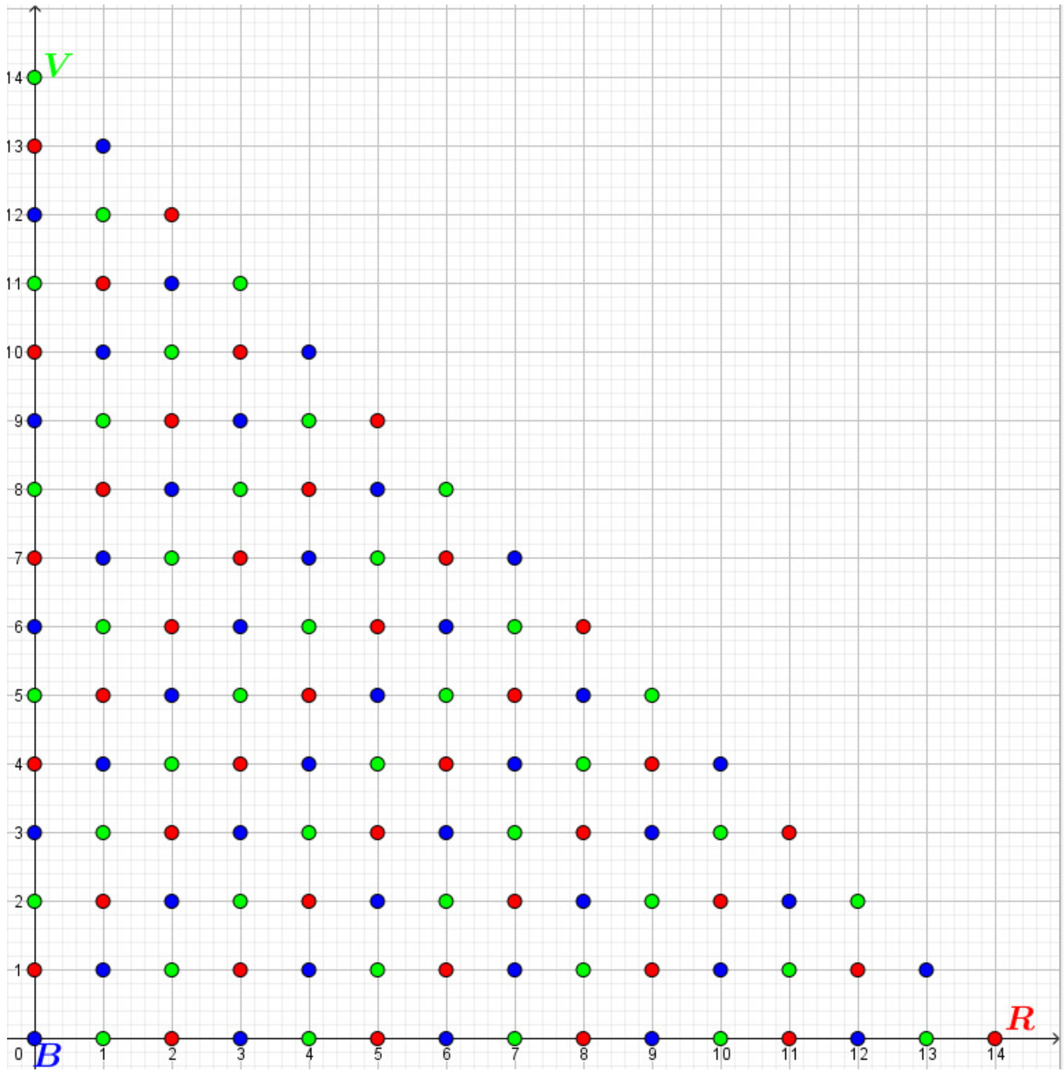
Partie B : une représentation géométrique

1. Origine de $\overrightarrow{u_1}$ (1;2;11)
   Extrémité de $\overrightarrow{u_1}$ (0;1;13) $\Big\}$ ces 2 configurations aboutissent à une configuration stable donnant 14 rouges.

   Origine de $\overrightarrow{u_2}$ (1;2;11)
   Extrémité de $\overrightarrow{u_2}$ (0;4;10) $\Big\}$ ces 2 configurations aboutissent à une configuration stable donnant 14 rouges.

   Origine de $\overrightarrow{u_3}$ (1;2;11)
   Extrémité de $\overrightarrow{u_3}$ (3;1;10) $\Big\}$ ces 2 configurations aboutissent à une configuration stable donnant 14 rouges.

2.



3. Voir la question d'avant.
4. a) Oui, il semble que toutes les configurations mènent à une configuration stable.
   b) Non, chaque configuration mène à une et une seule configuration stable.

Partie C : étude du cas général

1. On peut toujours faire disparaitre une des trois couleurs, c'est en croisant la couleur de plus faible effectif avec les autres couleurs.
2. Non pas toujours. Contre-exemple (1 ;2 ;3).