Travaux Dirigés n4

23 avril 2020

Epreuve de mathématiques

Situation d'évaluation

Texte : **Bénin á la CAN 2021**

La prochaine édition de la **C**oupe d'**A**frique des **N**ations (**CAN**),qui se disputera en 2021, aura lieu au Cameroun et se déroulera en hiver, entre le 9 janvier et le 16 février,afin de permettre á la FIFA d'organiser la Coupe du monde des clubs en été. En 2017,la Conféderation Africaine de Football (CAF) avait déjá reformé sa compétition phare, en faisant passer le nombre de selections de la finale de seize á vingt-quatre et en choisissant de l'organiser en été, comme ce fut en Egypte en 2019 avec le sacre de l'Algérie. On suppose que le Bénin y participe.
Dans une telle compétition, les Ecureils,l'équipe du Bénin gagne son premier match avec une probabilité de $0,25$. De plus si le premier match est gagné, elle gagne le second match avec une probabilité de $0,50$. Par contre, si elle a perdu son premier match,elle gagne le second match avec une probabilité de $0,1$. On supposera qu'il ne peut y avoir de match nul.
Par ailleurs, pour fortifier les joueurs á bien jouer afin que le Bénin puisse participer á la Coupe Du Monde en été,le Président Patrice TALON,fan du football aurait promis une somme de 200 000 euros et une villa á chaque joueur.

Tâche : Tu es invité(e) á déterminer si le Bénin ira á la Coupe Du Monde des clubs en été en résolvant chacun des problémes suivants.

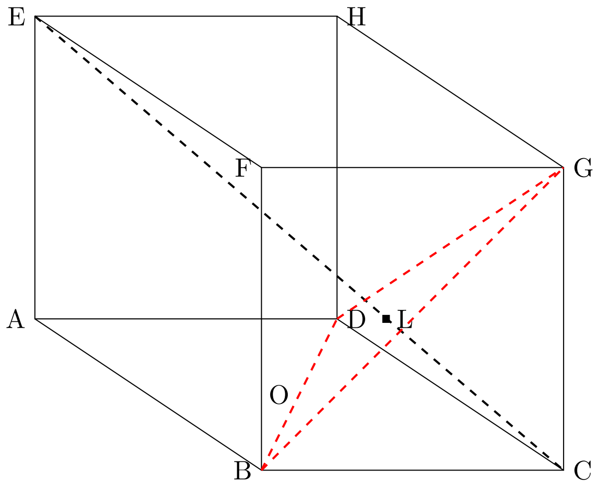
Problème I

On désigne par :
•A l'événement « le Bénin gagne son premier match » ;
•B l'événement « le Bénin gagne son second match » ;

1. Quelle est la probabilité pour le Bénin de gagner son second match ?
2. Quelle la probabilté pour le Bénin de gagner les deux matchs ?
3. Quelle est la probabilté que le Bénin ait gagné le premier match sachant qu'il a remporté le second match ?
4. Dire si les Ecureils participéront á la Coupe Du Monde des clubs en été.

Problème II

Dans cette partie on s'interesse á la forme du Stade Ahmadou-Ahidjo,terrain sur lequel se déroulera la CAN en 2021.
Le stade Ahmadou Ahidjo est un stade omnisport situé á Yaoundé au Cameroun. Il a été construit en 1972.D'une capacité de 40122 places assises après sa rénovation de novembre 2016,il accueille les matchs de l'équipe du Cameroun de football, ainsi que les matchs des grands clubs,comme ce sera le cas de la CAN 2021. Sa répresentation en pespective cavalière a la forme d'un cube ABCEDFGH d'arête 1 comme l'indique le schema ci-contre :



.

O milieu du segment $[BD]$

On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGD).
   (c) Vérifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (BGD) .
2. Donner une équation de la sphère (S) de centre C et tangente au plan (BGD).
3. A tout α appartenant á l'intervalle $[0, 1]$ on associe le point M de coordonnées (α , α, 1− α).
   (a) Montrer que M est un point du segment $[EG]$
   (b) Montrer que la distance du point M á la droite (BD) est égale á $\sqrt{3\alpha^2 - 2\alpha + \frac{3}{2}}$.
   (c) Déterminer α pour que la distance de M á la droite (BD) soit minimale.
   Soit L le point associé á cette valeur de α.
   (d) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BGD.
4. Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $k \in [0, 1]$
   (a) Donner l'expression analytique de h
   (b) Vérifier que $h(C) = M$.
   (c) Déterminer une équation de (S') image de (S) par h.

Problème III

On s'intereèsse maintenant á la position de chaque joueur sur le Stade Ahmadou-Ahidjo au cours de la CAN 2021.
Ici,le plan complexe P est muni d'un répère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note A le point d'affixe i. Á tout point M du plan,distinct de A, d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{zi}{z-i}$.

1. (a) Déterminer les points M tels que $M = M'$
   (b) Déterminer l'affixe du point B' associée au point B d'affixe 1
   (c) Déterminer l'affixe du point C tel que l'affixs de son image C' soit 2.
2. Etant donné un nombre complexe z, distinct de i ,on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ le nombre complexe associé, avec x, y, x', y' reéls.
   (a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M,distincts de A, pour lesquels z' est réel.
   (c) placer A,B,B',C,C' et réprésenter (Γ) sur une figure (unité graphique $4cm$)
3. Soit z un nombre complexe différent de i.

(a) Montrer que l'on a $z' = \frac{-1}{z-i}$.

(b.) On suppose que M, d'affixe z, appartient au cercle γ de centre A et de rayon 1. Montrer que M' appartient á γ.

4. Dans cette question,pour tout nombre complexe on pose $P(z) = z^4 - 1$ et (E) : $z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i = 0$.

(a) Factoriser $P(z)$ puis déduisant les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

(b.) En déduire á partir des réponses des questions précédentes les solutions de l'équation $(\frac{2z+1}{z-1})^4 = 1$.

5.(a) Montrer que(E) possède une unique solution imaginaire pure.

(b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Joyeuse fête de pâque!!!